Stochastische Prozesse   SoSem 2007   Blatt 5

1. (Stoppsatz für Supermartingale). Sei X_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ein Supermartingal bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_n)$, und sei C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine previsible Folge von beschränkten, nichtnegativen Zufallsvariablen.

a) Wie ist das diskrete stochastische Integral $C \bullet X$ definiert ? Zeige, dass $C \bullet X$ wieder ein Supermartingal ist.

b) Formuliere und beweise einen Stoppsatz für Supermartingale.

2. (Ruinproblem). Sei $p \in (0, 1)$ mit $p \neq \frac{1}{2}$. Wir betrachten den random walk $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, Y_i $(i \geq 1)$ i.i.d. mit $P[Y_i = +1] = p$ und $P[Y_i = -1] = q := 1 - p$.

a) Zeige, dass folgende Prozesse Martingale sind:

$$M_n \;:=\; \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, \qquad N_n \;:=\; S_n - n(p - q)\,.$$

b) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < 0 < b$ sei $T := \min\{n \geq 0 \,|\, S_n \notin (a, b)\}$. Zeige:

$$P[S_T = a] \;=\; \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a}} \qquad \text{und}$$

$$E[T] \;=\; \frac{b}{p - q} - \frac{b - a}{p - q} \cdot \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a}}\,.$$

3. (Stochastische Lyapunov-Bedingung). Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \mathbb{N}$, Startpunkt $x_0 \in S$ und Übergangsmatrix $p(x,y)$. Sei $u \geq 0$ eine superharmonische Funktion auf S, d.h. es gelte

$$u(x) \geq pu(x) = \sum_{y\in S} p(x,y) \cdot u(y)$$

für alle $x \in S$. Dann spielt u die Rolle einer *stochastischen Lyapunov–Funktion*:

a) $u(X_n)$ $(n = 0,1,\dots)$ ist ein nichtnegatives Supermartingal, dessen Doob-Zerlegung $u(X_n) = M_n + A_n$ durch

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1}(pu-u)(X_k) \quad (n = 0,1,\dots)$$

gegeben ist.

b) Für $S_\varepsilon := \{x \in S | (u - pu)(x) \geq \varepsilon\}$ gilt

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_{S_\varepsilon}(X_n)\right] \leq \frac{u(x_0)}{\varepsilon},$$

d.h. die Aufenthaltszeit in S_ε hat einen endlichen Erwartungswert.

Insbesondere ergibt sich folgendes Stabilitätskriterium:

(i) Aus $\bigcap_\varepsilon S_\varepsilon^c = \{z\}$ und S_ε^c endlich für ein $\varepsilon > 0$ folgt:

$$P\left[\lim_{n\to\infty} X_n = z\right] = 1.$$

(ii) Aus $\bigcap_\varepsilon S_\varepsilon^c = \emptyset$ folgt:

$$P\left[\lim_{n\to\infty} X_n = \infty\right] = 1.$$

4. (Verschärfung von Murphy's law).

[Alles was eine realistische Chance hat zu passieren, wird auch passieren — und zwar eher früher als später.]

Sei T eine Stoppzeit. Es existiere ein $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$P\,[T \leq n + k \,|\, \mathcal{F}_n] \;>\; \varepsilon \qquad P\text{–f.s. für alle } n \geq 0.$$

Zeige durch Induktion

$$P[T > ik] \;\leq\; (1 - \varepsilon)^i\,,$$

und folgere $E[T] < \infty$.

5. (Martingalformulierung von Bellman's Optimalitätsprinzip).

Der Gewinn pro Einsatz 1 in der n–ten Runde eines Spiels sei ε_n, wobei die ε_n i.i.d. Zufallsvariablen mit

$$P[\varepsilon_n = +1] = p\,, \qquad P[\varepsilon_n = -1] = q := 1 - p\,, \qquad \frac{1}{2} < p < 1,$$

sind. Der Einsatz C_n in der n–ten Runde muss zwischen 0 und Z_{n-1} liegen, wobei Z_{n-1} das Kapital zur Zeit $n-1$ ist. Sei $N \in \mathbb{N}$ die Spieldauer. Unser Ziel ist es, die mittlere ,,Zinsrate" $E[\log(Z_N/Z_0)]$ zu maximieren, wobei das Anfangskapital Z_0 eine vorgegebene Konstante ist. Zeige: Für *jede* (previsible) Strategie ist $\log Z_n - n\alpha$ ein Supermartingal, wobei

$$\alpha \;:=\; p \log p + q \log q + \log 2 \qquad \text{(Entropie)},$$

und für eine bestimmte Strategie ist es sogar ein Martingal. Es gilt also $E[\log(Z_N/Z_0)] \leq N\alpha$ mit Gleichheit bei geeigneter Wahl der Strategie. Wie sieht die optimale Strategie aus ?