

1. (First step analysis). Wir betrachten den Random walk auf \mathbb{Z} mit Übergangswahrscheinlichkeiten $p(x, x + 1) = p$, $p(x, x - 1) = q := 1 - p$, $p \in (\frac{1}{2}, 1)$. Sei

$$u(x) := E_x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a^{X_n} \right], \quad a > 0.$$

- a) Zeige : $u(x + 1) = a \cdot u(x)$.
- b) Berechne $u(0)$ durch Konditionieren auf den ersten Schritt, und interpretiere das Ergebnis.

2. A particle performs a random walk on a bow tie ABCDE drawn beneath. From any vertex its next step is equally likely to be to any neighbouring vertex. Initially it is at A. Find the expected value of:

- a) the time of first return to A, given no prior visit by the particle to E,
- b) the number of visits to D before returning to A, given no prior visit by the particle to E.

3. (Martingaldefinition). Zeige:

- a) Ein previsibles Martingal ist P -f.s. konstant.
- b) Für ein nichtnegatives Martingal $(X_n)_{n \geq 0}$ gilt P -fast sicher:

$$X_n(\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{n+k}(\omega) = 0 \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

- c) Konstruiere ein Martingal X_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) mit

$$E[X_n] = 0 \quad \text{für alle } n, \quad \text{aber} \quad X_n \rightarrow -\infty \quad P\text{-f.s.}$$

4. (Stoppsatz). Sei $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ eine Filtration. Eine Zufallsvariable $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ heißt *Stoppzeit* falls $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \geq 0$ gilt.

- a) Beweise durch Induktion: Ist X_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) ein Martingal und T eine Stoppzeit bzgl. (\mathcal{F}_n) , dann gilt

$$E[X_{T \wedge n}] = E[X_0] \quad \forall n \geq 0.$$

- b) Unter welchen Voraussetzungen folgt

$$E[X_T] = E[X_0] \quad ?$$

5. (Martingale des Random walk). Sei

$$X_n = x + S_n, \quad S_n = Y_1 + \dots + Y_n, \quad Y_i \text{ i.i.d. mit } P[Y_i = \pm 1] = \frac{1}{2},$$

der klassische random walk mit Start in $x \in \mathbb{Z}$.

- a) Zeige, dass die folgenden Prozesse Martingale sind:

$$(i) X_n, \quad (ii) M_n := X_n^2 - n \quad (iii) M_n^\lambda := e^{\lambda X_n - a(\lambda)n} \text{ für jedes } \lambda \in \mathbb{R},$$

wobei $a(\lambda) := \log \cosh \lambda$.

- b) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < x < b$ sei

$$T(\omega) := \inf \{n \geq 0 \mid X_n(\omega) \notin (a, b)\}.$$

Zeige durch Anwenden des Stoppsatzes (s. Aufgabe 4) auf das Martingal X_n :

$$P[X_T = a] = \frac{b - x}{b - a}.$$

- c) Leite eine Formel für $E[T]$ her.