Stochastische Prozesse SoSem 2007 Blatt 3

1. (Ruinwahrscheinlichkeiten). Ein Spieler hat 2 Euro und möchte daraus möglichst schnell 10 Euro machen. Dazu spielt er ein Spiel mit folgenden Regeln : Eine faire Münze wird geworfen. Hat der Spieler die richtige Seite erraten, gewinnt er eine Summe von der Größe seines Einsatzes, und erhält seinen Einsatz zurück – andernfalls verliert er seinen Einsatz. Der Spieler beschließt eine feste Strategie zu wählen : Falls er weniger als 5 Euro besitzt, setzt er sein gesamtes Kapital ein; anderenfalls setzt er gerade soviel, daß er im Anschluß genau 10 Euro hat, falls er beim nächsten Wurf gewinnt.

Sei $X_0 = 2$, und sei X_n das Kapital nach n Münzwürfen. Zeige, daß der Spieler sein Ziel mit Wahrscheinlichkeit 1/5 erreicht.

2. Wir betrachten die zeithomogene Markovkette auf $\{1, 2, 3\}$ mit Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1-2q & 2q & 0 \\ q & 1-2q & q \\ 0 & 2q & 1-2q \end{pmatrix}.$$

Berechne die n–Schritt Rückkehrwahrscheinlichkeiten $P_x[X_n = x]$, sowie die mittlere Anzahl der Besuche im Startpunkt x bis zur Zeit n für $x = 1, 2, 3$. Mit welcher Frequenz wird der Startpunkt für $n \to \infty$ besucht ?

3. (Lineare Prognose).

a) Seien X und Y reellwertige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit absolutstetiger gemeinsamer Verteilung, und sei $h : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ meßbar. Zeige, daß

$$z \;\mapsto\; \int h(x, z)\, f_{X|Y}(x|z)\, dx$$

eine Version der bedingten Erwartung $E[h(X, Y)|Y = z]$ ist.

b) Die gemeinsame Verteilung eines unbeobachteten Signals X und eines Beobachtungswerts Y sei eine zweidimensionale Normalverteilung mit Mittelwert $m = (m_X, m_Y)$ und Kovarianzmatrix

$$V \;=\; \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechne den Prognosewert $E[X|Y]$ für das Signal X gegeben die Beobachtung Y, sowie den mittleren quadratischen Prognosefehler $\mathrm{Var}\,(X|Y)$.

4. (Satz von Liouville). Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum S und Übergangsmatrix p. Für alle $x, y \in S$ gelte $P_x[T_y < \infty] = 1$, wobei T_y die Eintrittszeit in den Zustand y ist. Zeige: Jede nichtnegative harmonische Funktion $h : S \to [0, \infty[$ ist konstant.

***5.** An urn initially contains n green balls and $n+2$ red balls. A ball is picked at random: If it is green then a red ball is also removed and both are discarded. If it is red then it is replaced together with an extra red and an extra green ball. This is repeated until there are no green balls in the urn. Show that the probability the process terminates is $1/(n+1)$.