Stochastische Prozesse SoSem 2007 Blatt 2

1. (Examples of Markov chains). A die is rolled repeatedly. Which of the following are Markov chains? For those that are, supply the transition matrix.

a) The largest number X_n shown up to the nth roll.

b) The number N_n of sixes in n rolls.

c) At time r, the time C_r since the most recent six.

d) At time r, the time B_r until the next six.

2. (Projizierte Markovketten). Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Sei ferner $\varphi : E \longrightarrow F$ eine Abbildung von E in eine weitere abzählbare Menge F.

a) Zeige durch ein Beispiel, dass $(\varphi \circ X_n)_{n\geq 0}$ keine Markovkette zu sein braucht.

b) Unter welcher (nicht-trivialen) Bedingung an φ und P ist $(\varphi \circ X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette?

3. (Konstruktion und Simulation von Markovketten).

a) Sei E eine abzählbare Menge, und $(Y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in einem messbaren Raum $(S, \mathcal{S})$. Wir definieren einen stochastischen Prozeß $(X_n)_{n\geq 0}$ durch $X_0 = x \in E$ und $X_{n+1} = \Phi(X_n, Y_{n+1})$, wobei $\Phi : E \times S \longrightarrow E$ eine gegebene messbare Abbildung ist. Zeige, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette ist, und bestimme ihre Übergangsmatrix.

b) Umgekehrt sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und P eine Übergangsmatrix auf $E = \{0, 1, 2, \dots\}$. Sei

$$\begin{aligned} \psi(x) &= k \quad \text{für } x \in [t_k, t_{k+1}[, \\ g(i, x) &= k \quad \text{für } x \in [s_k^{(i)}, s_{k+1}^{(i)}[, \end{aligned}$$

wobei

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(k), \qquad s_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{n-1} P(i,k).$$

Sei $(U_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von unabhängigen, auf $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Zeige, dass der durch

$$X_0 = \psi(U_0), \quad X_{n+1} = g(X_n, U_{n+1}),$$

definierte stochastische Prozeß eine Markovkette mit Übergangsmatrix P und Startverteilung μ ist.

4. (Strong Markov property). Let X be a Markov chain on a discrete state space S, and let T be a random variable taking values in $\{0,1,2,\dots\}$ with the property that the indicator function $I_{\{T=n\}}$ is a function of the variables $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$. Such a random variable T is called a *stopping time*, and the above definition requires that it is decidable whether or not T equals n with a knowledge only of the past and present, and with no further information about the future. Show that

$$P\left[X_{T+m} = j \mid X_k = x_k \text{ for } 0 \leq k < T, X_T = i\right] = P\left[X_{T+m} = j \mid X_T = i\right]$$

for all $m \geq 0$, $i, j \in S$, and all sequences (x_k) of states.

5. Es seien $\theta, U_1, U_2, \dots$ unabhängig mit $P(U_i \leq x) = x$ für $x \in (0,1)$. Wir setzen

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{für } U_i \leq \theta \\ -1 & \text{für } U_i > \theta \end{cases}$$

und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Mit anderen Worten: Wir wählen zunächst θ gemäß einer gegebenen Verteilung aus, und werfen dann eine Münze mit Wahrscheinlichkeit θ für "Kopf", um eine Irrfahrt zu generieren. Berechne $P[X_{n+1} = 1 | S_1, \dots, S_n]$ und folgere, dass S_n eine zeitlich inhomogene Markovkette ist.

Bemerkung : Dies hängt damit zusammen, dass "S_n eine suffiziente Statistik zum Schätzen von θ" ist.