Stochastische Prozesse SoSem 2007 Blatt 13

1. (Symmetrien der Brownschen Bewegung).

a) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ bzgl. P eine stetige eindimensionale Brownsche Bewegung mit Start in 0. Zeige: B_t ist ein Gaußprozess mit

(1) $\quad E[B_t] = 0 \quad$ und $\quad \mathrm{cov}(B_t, B_s) = t \wedge s \quad$ für alle $s, t \geq 0$.

b) Umgekehrt ist jeder stetige Gaußprozess mit (1) eine Brownsche Bewegung mit Start in 0. *(Es kann vorausgesetzt werden, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}^n$ eindeutig durch ihre Fouriertransformation bestimmt ist.)*

c) Folgere, dass folgende Prozesse Brownsche Bewegungen sind:

(i) $-B_t$ $\qquad$ (ii) $B_{t+h} - B_h$ $(h \geq 0$ fest$)$ $\qquad$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$ $(a > 0$ fest$)$.

2. (Examensaufgabe 4. Jahr, Oxford 2003).

a) State without proof a version of the optional stopping theorem for a continuous–time martingale.

b) Let

$$Y_t = \sigma B_t + m \cdot t$$

$(t \geq 0)$ where $(B_t)_{t\geq 0}$ is a one–dimensional Brownian motion starting at 0 defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, and σ, m are real constants with $\sigma > 0$. Let $a < 0 < b$. For $m = 0$, find the probability that Y_t reaches b before a.

c) For $m \neq 0$, determine $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $(e^{\lambda Y_t})_{t\geq 0}$ is a martingale. Find the probability that Y_t reaches b before a in this case.

d) Stating clearly any theorem you assume, show that for $m < 0$,

$$Y^* := \max_{t\geq 0} Y_t < \infty \quad P\text{–a.s.}$$

Prove that

$$P[Y^* \geq b] = e^{-\alpha b}$$

where $\alpha = \frac{2|m|}{\sigma^2}$.

3. (Skaleninvarianz und Rekurrenz). Sei B_t, $t \geq 0$, eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Sei $Z := \sup_{t \geq 0} B_t$. Zeige, dass λZ für jedes $\lambda > 0$ dieselbe Verteilung wie Z hat. Folgere $Z = +\infty$ P–f.s.

b) Zeige, dass die eindimensionale Brownsche Bewegung *rekurrent* ist, d.h., die Menge $\{t \geq 0 \,:\, B_t = a\}$ ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ P–f.s. nicht von oben beschränkt.

4. (Lokale Maxima Brownscher Pfade). Sei B_t, $t \geq 0$, eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeige, dass die folgenden Aussagen für P–f.a. ω gelten :

a) Die Trajektorie $t \mapsto B_t(\omega)$ ist in keinem Intervall $[a, b]$, $a < b$, monoton.

b) Die Menge der lokalen Maxima von $t \mapsto B_t(\omega)$ ist dicht in $[0, \infty)$.

c) Alle lokalen Maxima von $t \mapsto B_t(\omega)$ sind strikt (d.h. für jedes lokale Maximum m gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_t(\omega) < B_m(\omega)$ für alle $t \in (m - \varepsilon, m + \varepsilon)$, $t \neq m$).