Stochastische Prozesse SoSem 2007 Blatt 12

1. (Martingale der Brownschen Bewegung). Zeige, dass folgende Prozesse zeitstetige Martingale sind (d.h. $E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s \ \forall\, 0 \leq s \leq t)$:

a) Eine eindimensionale Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ bzgl. der Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(B_r : \, 0 \leq r \leq t)$.

b) $M_t^\lambda \;=\; \exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, bzgl. derselben Filtration.

c) $h(B_t)$, falls $(B_t)_{t\geq 0}$ eine d–dimensionale Brownsche Bewegung, und h eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^d$ ist (d.h. $\Delta h = 0$), bzgl. der Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(B_r^1, B_r^2, \ldots, B_r^d \;:\; 0 \leq r \leq t)$.

2. (Nullstellen Brownscher Pfade). B_t $(t \in [0,1])$ sei eine stetige Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Zeige, dass $B_t(\omega)$ — aufgefasst als Abbildung von $\Omega \times [0,1]$ nach $\mathbb{R}$ — messbar ist bzgl. der Produkt–σ–Algebra.

b) Berechne den Erwartungswert und die Varianz von $\int_0^1 B_s(\omega)\, ds$.

c) Zeige: P–fast sicher gilt: $\lambda\left(\{t \in [0,1] |\, B_t(\omega) = 0\}\right) = 0\,.$

3. (Asymptotik des ARP). Wir betrachten den durch

$$X_n \;=\; \rho\, X_{n-1} \,+\, \sigma\, W_n\,, \qquad \rho, \sigma > 0,$$

mit unabhängigen $N(0,1)$ verteilten Zufallsvariablen W_n definierten autoregressiven Prozeß im $\mathbb{R}^1$.

a) Zeige, daß der Dobrushinsche Kontraktionskoeffizient $\rho(p)$ des Übergangskerns gleich 1 ist.

b) Berechne die n–Schritt–Übergangswahrscheinlichkeiten, und zeige, daß der Prozeß für $\rho < 1$ exponentiell schnell ins Gleichgewicht konvergiert. Ist die Konvergenz gleichmäßig für alle Startpunkte $x \in \mathbb{R}^1$?

4. (Wiener–Lévy–Konstruktion der Brownschen Bewegung). Die Schauderfunktionen $e_{n,k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, sind wie folgt definiert :

$$e_{0,1}(t) := t \wedge (1-t),$$
$$e_{n,k}(t) := \begin{cases} 2^{-n/2} \cdot e_{0,1}(2^n t - k) & \text{für } t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}] \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$t \in [0,1]$. Für $x \in C([0,1], \mathbb{R})$ mit $x(0) = 0$ sei

$$a_{n,k} \;:=\; 2^{n/2} \cdot \Delta_{n,k} x \qquad \text{mit} \qquad \Delta_{n,k} x := 2 \cdot (x(m_{n,k}) - \bar{x}_{n,k}),$$

wobei $m_{n,k}$ der Mittelpunkt des dyadischen Intervalls $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ ist, und $\bar{x}_{n,k} := (x((k+1) \cdot 2^{-n}) + x(k \cdot 2^{-n}))/2$. Zeige :

a)
$$x_m(t) \;:=\; x(1) \cdot t \;+\; \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{2^n - 1} a_{n,k} \cdot e_{n,k}(t)$$
konvergiert gleichmäßig gegen x (*Satz von Schauder*). *(Hinweis : x_m ist die polygonale Approximation von x bzgl. der m–ten dyadischen Partition von* $[0,1]$.*)*

b) Bezüglich des Wienermaßes P auf $\Omega = C([0,1])$ sind die Zufallsvariablen
$$Z(\omega) \;:=\; X_1(\omega), \qquad Y_{n,k}(\omega) \;:=\; 2^{n/2} \cdot \Delta_{n,k} X(\omega),$$
unabhängig und $N(0,1)$–verteilt. Also folgt aus der Existenz des Wienermaßes die *Wiener–Lévy Darstellung*
$$(1) \qquad X_t(\omega) \;=\; X_1(\omega) \cdot t \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n - 1} Y_{n,k}(\omega) \cdot e_{n,k}(t) \qquad \text{für alle } \omega.$$

*c) Umgekehrt seien X_1 und $Y_{n,k}$ $(n \geq 0, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$ unabhängige $N(0,1)$–verteilte Zufallsvariablen. Zeige mithilfe des Weierstraßschen Kriteriums für gleichmäßige Konvergenz von Reihen und des Borel–Cantelli–Lemmas, dass die Reihe in (1) auf $[0,1]$ fast sicher gleichmäßig konvergiert. Dies liefert eine *explizite Konstruktion der Brownschen Bewegung*. (*Hinweis: Für eine $N(0,1)$–verteilte Zufallsvariable Y gilt:* $P[|Y| > n] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n} \exp(-n^2/2)$.)