Stochastische Prozesse SoSem 2007 Blatt 11

1. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ die kanonische Markovkette mit Zustandsraum $E = \{1,2,3,4\}$ und Übergangsmatrix

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige, dass die Markovkette irreduzibel und positiv rekurrent ist.

b) Bestimme die bzgl. p invariante Wahrscheinlichkeitsverteilung.

c) Bestimme die fast sicheren Grenzwerte von $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$ und $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2$ für $n \to \infty$.

2. Man betrachte eine Produktionsanlage, bei der jedes hergestellte Element mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ fehlerhaft ist. Es wird der folgende Prüfplan eingeführt mit dem Ziel, fehlerhaft angefertigte Elemente zu erfassen ohne jedes einzelne Element untersuchen zu müssen. Der Plan hat zwei Phasen: In Phase A wird ein Element mit Wahrscheinlichkeit $r \in (0,1)$ kontrolliert. In Phase B werden alle Elemente überprüft. Es wird von Phase A zu Phase B gewechselt, sobald ein fehlerhafter Artikel entdeckt wird. Es wird von Phase B zu Phase A gewechselt, sobald N aufeinanderfolgend kontrollierte Elemente fehlerfrei sind.
Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ der Prozess mit Werten in $\{E_0, \ldots, E_N\}$, wobei E_j für $j \in \{0, \ldots, N-1\}$ den Zustand beschreibt, dass sich der Prüfplan in Phase B befindet mit j aufeinanderfolgend als fehlerfrei erkannten Elementen und E_N den Zustand, dass sich der Plan in Phase A befindet.

a) Zeige, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ eine zeithomogene Markovkette ist. Gib die Übergangsmatrix an und zeige, dass eine eindeutige invariante Verteilung existiert. Berechne diese.

b) Gib die Effizienz des Prüfplans an. Diese ist definiert als das Verhältnis des Langzeitanteils der als fehlerhaft erkannten Elemente zu dem Anteil der fehlerhaften Elemente.

3. Eine Folge von A's und B's wird wie folgt konstruiert: Das erste Folgenglied wird zufällig gewählt gemäß $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Ebenso wird das zweite Element zufällig und unabhängig vom ersten gewählt. Sobald die ersten $n \geq 2$ Elemente ausgewählt sind, wird das $(n+1)$-te Element, bedingt auf das $(n-1)$-te und n-te Folgenglied, wie folgt gewählt:

$$P[A|AA] = \tfrac{1}{2}, \quad P[A|AB] = \tfrac{1}{2}, \quad P[A|BA] = \tfrac{1}{4}, \quad P[A|BB] = \tfrac{1}{4}.$$

Wie hoch ist der Anteil von A's und B's in einer langen Kette?

4. Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine irreduzible zeithomogene Markovkette mit stationärer Startverteilung π. Sei A eine Teilmenge des Zustandsraumes S, und für $k \geq 1$ sei T_k die k-te Rückkehrzeit nach A. Zeige, dass

$$\lim_{k\uparrow\infty} \frac{T_k}{k} = \frac{1}{\pi(A)} \qquad \text{gilt.}$$

5. (Maximale Kopplung). Seien f_1 und f_2 zwei Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}^k$. Es bezeichne $\mathcal{D}(f_1, f_2)$ die Familie aller Paare (X, Y) von auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum definierten $\mathbb{R}^k$-wertigen Zufallsvariablen, so dass die Verteilungen von X bzw. Y absolutstetig mit Wahrscheinlichkeitsdichte f_1 bzw. f_2 sind. Zeige, dass für alle $(X, Y) \in \mathcal{D}(f_1, f_2)$ die Ungleichung

$$P[X = Y] \leq 1 - \tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^k} |f_1(x) - f_2(x)|\, dx$$

gilt. Finde Zufallsvariablen $(X, Y) \in \mathcal{D}(f_1, f_2)$, für die Gleichheit gilt.

6. (Satz von Kac und Wiederkehrsatz von Poincaré). Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definierter stationärer stochastischer Prozess mit messbarem Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$. Zeige:

a) Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$E[\tau_A; A] = P[\tau_A < \infty],$$

wobei $\tau_A := \inf\{n \geq 1 | (X_n, X_{n+1}, \dots) \in A\}$.

b) $(X_n)_{n\geq 0}$ ist rekurrent in folgendem Sinne: Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\Theta^n(\omega) = (X_n(\omega), X_{n+1}(\omega), \dots) \in A \quad \text{unendlich oft für } P\text{-f.a. } \omega \in A.$$