

1. (Zeitumkehr). Sei (X_n, P_μ) eine zeithomogene Markovkette mit diskretem Zustandsraum S und Übergangsmatrix p . Dabei sei μ eine invariante Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S mit $\mu(x) > 0$ für alle $x \in S$. Zeige: Die Zeitumkehr von (X_n, P_μ) ist wieder eine zeithomogene Markovkette mit Übergangsmatrix \hat{p} , wobei gilt:

$$\mu(x)\hat{p}(x, y) = \mu(y)p(y, x).$$

2. (Autoregressiver Prozess in \mathbb{R}^d). Der autoregressive Prozess X_n in \mathbb{R}^d ist durch die folgende Rekursionsformel gegeben:

$$X_n = \theta X_{n-1} + U_n.$$

Dabei seien $\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung und U_n unabhängige, $N(0, I)$ -verteilte Zufallsvariablen.

Zeige: Ist θ nicht symmetrisch, dann existiert unter geeigneten Voraussetzungen (welchen?) eine invariante Verteilung, aber die "detailed balance" Gleichungen gelten nicht!

3. Es bezeichne X_n die Anzahl der Teilchen in einem gegebenen Volumen V zur Zeit n . In dem Zeitintervall $[n, n + 1)$ verlässt jedes der X_n Teilchen das Volumen V mit Wahrscheinlichkeit $p = 1 - q$, $0 < q < 1$, und eine mit Parameter λ Poissonverteilte Anzahl von Teilchen dringt in V ein. Diese zufälligen Phänomene seien unabhängig voneinander.

- Berechnen $E[e^{itX_1} | X_0 = x]$.
- X_0 sei Poissonverteilt mit Parameter θ . Wie sieht die charakteristische Funktion von X_1 aus? Zeige, dass die Verteilung μ_θ von X_0 für einen geeigneten Wert von θ eine invariante Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.
- Zeige, dass die Übergangsmatrix \tilde{p} der Markovkette X_n gegeben ist durch:

$$\tilde{p}(x, y) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x \wedge y} \binom{x}{k} q^k (1 - q)^{x-k} \frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!}.$$

Folgere, dass die Markovkette irreduzibel und positiv rekurrent ist.

- d) Was ist der P_x -fast sichere Grenzwert von $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k$ für $n \rightarrow \infty$? Was ist der von $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k^2$?

4. Eine Maus bewegt sich zufällig horizontal oder vertikal auf einem Schachbrett mit 16 Quadraten. (Diagonale Bewegungen sind nicht erlaubt!) In jedem Schritt bewegt sie sich von ihrem aktuellen Standpunkt auf dem Brett auf eines der k angrenzenden zulässigen Quadrate mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{k}$. Es seien D die Menge der Quadrate des Schachbrettes und $(X_n)_{n \geq 0}$ die beschriebene Markovkette mit Zustandsraum D .

- a) Zeige, dass X_n irreduzibel und positiv rekurrent ist.
b) Berechne die invariante Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_n .

5. (\mathcal{L}^1 -Version der Maximalungleichung).

Sei X_n ein Martingal und $X_n^* := \max_{k \leq n} |X_k|$. Zeige:

- a) $E[|X_n^*|] \leq \frac{e}{e-1} (1 + E[|X_n| \log |X_n|])$.
b) $E[\sup |X_n|] \leq \frac{e}{e-1} (1 + \sup E[|X_n| \log |X_n|])$.

6. (Gleichmäßige Integrierbarkeit). Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Zeige: Konvergiert X_n gegen X in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dann konvergiert X_n gegen X stochastisch, und $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichmäßig integrierbar.