Stochastische Prozesse SoSem 2007 Blatt 1

1. Seien X und Y unabhängige identisch verteilte diskrete Zufallsvariablen ≥ 0 mit Erwartungswert m.

a) Wo liegt der Fehler in der folgenden Argumentation:

$$E[X|X+Y=z] \;=\; E[X|X=z-Y] \;=\; E[z-Y] \;=\; z-m\,?$$

b) Zeige:

$$E[X|X+Y] \;=\; \frac{1}{2}\,(X+Y)\,.$$

c) Kann man auf ähnliche Weise

$$E[X|X\cdot Y] \;=\; (X\cdot Y)^{1/2}$$

zeigen?

2. Eine Fabrik stellt Roboter her, die mit Wahrscheinlichkeit p defekt sind. Ein Test erkennt Fehler (falls vorhanden) mit Wahrscheinlichkeit $1-\varepsilon$.

a) Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Roboter, der den Test passiert hat, trotzdem defekt ist, beträgt $\varepsilon p/(1-p+\varepsilon p)$.

b) Die Fabrik stellt an einem Tag n Roboter her. Sei X die Anzahl der defekten Roboter, und Y die Anzahl der als defekt erkannten. Zeige unter geeigneten Unabhängigkeitsannahmen:

$$E[X|Y] \;=\; Y+(n-Y)\cdot\frac{\varepsilon p}{1-p+\varepsilon p} \;=\; \frac{\varepsilon pn+(1-p)Y}{1-p+\varepsilon p}\,.$$

3. (Compounding). Sei X eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit zufälligem Parameter Λ, wobei Λ exponentialverteilt ist mit Parameter μ. Bestimme die Verteilung von X.

4. (Branching with immigration). Each generation of a branching process (with a single progenitor) is augmented by a random number of immigrants who are indistinguishable from the other members of the population. Suppose that the numbers of immigrants in different generations are independent of each other and of the past history of the branching process, each such number having probability generating function $H(s)$. Show that the probability generating function G_n of the size of the nth generation satisfies

$$G_{n+1}(s) \;=\; G_n(G(s))H(s) \;,$$

where G is the probability generating function of a typical family of offspring.

5. (Eigenschaften der bedingten Erwartung).
Seien $X, Y \geq 0$ reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Seien ferner $(S, \mathcal{S})$ ein meßbarer Raum und $Z : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable. Definiere, was eine Version der bedingten Erwartung von X gegeben Z ist. Zeige, daß die folgenden Aussagen für beliebige Versionen der bedingten Erwartungen gelten:

a) $E[\,E[X|Z]\,] \;=\; E[X] \qquad P$–f.s.

b) Ist X unabhängig von Z, dann gilt

$$E[X|Z] \;=\; E[X] \qquad P\text{–f.s.}$$

c) Ist Y $\sigma(Z)$–messbar, dann gilt

$$E[Y \cdot X|Z] \;=\; Y \cdot E[X|Z] \qquad P\text{–f.s.}$$

d) $E[\lambda X + \mu Y|Z] \;=\; \lambda\, E[X|Z] + \mu\, E[Y|Z] \qquad P$–f.s. für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.