Stochastische Analysis I WS 2004/05 Blatt 7

Transformationen von stochastischen Differentialgleichungen

1. (Concentration of measure).
Sei M ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$. Zeige :

$$P\left[\max_{s\le t} M_s \ge y\,,\ \langle M\rangle_t \le K\right] \ \le\ \exp\left(-\frac{y^2}{2K}\right) \qquad \forall\, t, y, K > 0\,.$$

2. (Drifttransformation durch Maßwechsel). Seien $b, \beta : [0,\infty)\times C([0,\infty),\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma : [0,\infty)\times C([0,\infty),\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n)$ produktmeßbar und adaptiert mit

$$\sigma(t,x)\,\beta(t,x) \ = \ b(t,x)\,.$$

Zeige : Ist X_t eine schwache Lösung der SDgl

$$dX_t \ = \ \sigma(t,X)\,dB_t\ ,$$

und ist $Z_t := \exp(\int_0^t \beta(s,X)\,dX_s - \int_0^t |\beta(s,X)|^2\,ds)$ ein Martingal, dann ist X_t unter dem tranformierten Maß mit lokalen Dichten Z_t eine schwache Lösung von

$$dX_t \ = \ b(t,X)\,dt \ + \ \sigma(t,X)\,dB_t\ .$$

3. (Zusammenhang zwischen Brownscher Bewegung mit Drift und Brownscher Bewegung mit Absorption).
Sei B unter P_x eine d–dimensionale Brownsche Bewegung mit $B_0 = x$, und sei X unter P_x eine Lösung der stochastischen DGl

(1) $$dX_t \ = \ \nabla h(X_t)\,dt \ + \ dB_t\ , \qquad X_0 = x\,,$$

mit $h \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$.

a) Zeige: Für $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$E_x[f(X_t)] \;=\; E_x\left[e^{-\int_0^t V(B_s)\,ds}\, e^{h(B_t)-h(x)}\, f(B_t)\right],$$

wobei

$$V(x) \;:=\; \frac{1}{2}\,|\nabla h(x)|^2 \;+\; \frac{1}{2}\Delta h(x)\,.$$

(Eindeutigkeit in Verteilung von (1) kann vorausgesetzt werden).

b) Folgere: Ist $V \geq 0$, dann gilt für die Übergangsoperatoren $(p_t f)(x) := E_x[f(X_t)]$ der Brownschen Bewegung mit Drift:

$$p_t f \;=\; e^{-h}\, p_t^V(e^h f)\,,$$

wobei p_t^V die Übergangsoperatoren der absorbierenden Brownschen Bewegung mit Absorptionsrate $V(x)$ sind.

Bemerkung: Der Generator von p_t ist $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Delta + \nabla h \cdot \nabla$, der Generator von p_t^V ist der Schrödingeroperator $\mathcal{L}^V = \frac{1}{2}\Delta + V$. Die Grundzustandstransformation der Quantenmechanik überführt den Schrödingeroperator $\mathcal{L}^V$ in $\mathcal{L}$. Die Transformation „BB mit Drift $\mapsto$ BB mit Absorption" *ist also eine stochastische Version der inversen Grundzustandstransformation.*

4. (Transformation des Zustandsraums). Bei eindimesionalen stochastischen Differentialgleichungen kann man den Drift durch eine Koordinatentransformation des Zustandsraums entfernen: Sei X eine Lösung von

(2) $$dX_t \;=\; \sigma(X_t)\,dB_t \;+\; b(X_t)\,dt\;,$$

und sei $s \in C^2(\mathbb{R})$. Zeige *unter geeigneten Voraussetzungen*:

a) $Y_t := s(X_t)$ ist genau dann ein lokales Martingal, wenn

(3) $$\frac{1}{2}\sigma^2 s'' \;+\; bs' \;=\; 0\,.$$

b) Bestimme s, so daß (3) gilt. Welche SDgl löst Y_t in diesem Fall ?

c) Konstruiere mit dieser Methode explizit eine schwache Lösung von (2).

5. (Brownsche Skalierungsinvarianz). Seien $\sigma \in C(\mathbb{R}^d, \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^d))$ und $b \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ mit

$$\sigma(cx) = \sigma(x) \qquad \text{und} \qquad c \cdot b(cx) = b(x) \qquad \forall\, c > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Zeige: Gilt Eindeutigkeit in Verteilung für die SDgl

$$dX_t \;=\; \sigma(X_t)\, dB_t \;+\; b(X_t)\, dt \ ,$$

und ist X_t^x eine schwache Lösung mit $X_0^x = x$, dann haben die Prozesse $\frac{1}{c} X_{c^2 t}^x$ und $X_t^{x/c}$ dieselbe Verteilung. Gib Beispiele für Prozesse mit dieser Skalierungsinvarianz.

6. (Variation der Konstanten). Betrachte die eindimensionale SDgl

$$dX_t \;=\; b(t, X_t)\, dt \;+\; \alpha(t)\, X_t\, dB_t$$

mit $b \in C([0,\infty) \times \mathbb{R})$ und $\alpha \in C([0,\infty))$.

a) Im Fall $b \equiv 0$ ist

$$Z_t \;=\; \exp\left(\int_0^t \alpha(s)\, dB_s \;-\; \frac{1}{2} \int_0^t \alpha(s)^2\, ds \right)$$

eine starke Lösung.

b) Im allgemeinen ist $X_t := C_t \cdot Z_t$ eine starke Lösung, falls C_t die *gewöhnliche Differentialgleichung*

$$\frac{dC_t}{dt} \;=\; \frac{1}{Z_t}\, b(t, C_t Z_t) \qquad \text{pfadweise löst.}$$

c) Konstruiere explizit starke Lösungen der SDgl

$$dX_t \;=\; X_t^\gamma\, dt \;+\; \mu\, X_t\, dB_t \ , \qquad X_0 = x > 0\,.$$

Für welche Werte von γ und μ explodiert die Lösung in endlicher Zeit ?