Stochastische Analysis I WS 2004/05 Blatt 6

1. (Lévy Area). Ist $c(t) = (x(t), y(t))$ eine glatte Kurve im $\mathbb{R}^2$ mit $c(0) = 0$, dann beschreibt

$$A(t) \;=\; \int_0^t (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\, ds \;=\; \int_0^t x\, dy - \int_0^t y\, dx$$

die von der Sekante vom Ursprung nach $c(s)$ im Parameterintervall $[0,t]$ überstrichene gerichtete Fläche. In Analogie definiert man für eine zweidimensionale Brownsche Bewegung $B_t = (X_t, Y_t)$ mit $B_0 = 0$ die *Lévy Area*

$$A_t \;:=\; \int_0^t X_s\, dY_s \;-\; \int_0^t Y_s\, dX_s\,.$$

a) Seien $\alpha(t)$, $\beta(t)$ C^1 Funktionen, $p \in \mathbb{R}$, und sei

$$V_t \;=\; ipA_t \;-\; \frac{\alpha(t)}{2}\left(X_t^2 + Y_t^2\right) \;+\; \beta(t)\,.$$

Zeige durch Anwenden der Itôformel, daß e^{V_t} ein lokales Martingal ist, falls $\alpha'(t) = \alpha(t)^2 - p^2$ und $\beta'(t) = \alpha(t)$.

b) Sei $t_0 \in [0,\infty)$. Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen für α und β mit $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = 0$ ist

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= p \cdot \tanh(p \cdot (t_0 - t))\,, \\ \beta(t) &= -\log\cosh(p \cdot (t_0 - t))\,. \end{aligned}$$

Folgere

$$E\left[e^{ipA_{t_0}}\right] \;=\; \frac{1}{\cosh(pt_0)} \qquad \forall\, p \in \mathbb{R}\,.$$

c) Zeige, daß die Verteilung von A_t absolutstetig ist mit Dichte

$$f_{A_t}(x) \;=\; \frac{1}{2t\cosh(\frac{\pi x}{2t})}\,.$$

2. (Girsanovtransformation bzgl. der Brownschen Bewegung). Sei

$$X_t \;=\; B_t \,+\, \int_0^t G_s\, ds$$

mit einer $(\mathcal{F}_t)$ Brownschen Bewegung B_t und einem beschränkten, $(\mathcal{F}_t)$–adaptierten, produktmeßbaren Prozeß G_t.

a) Zeige, daß

$$Z_t \;=\; \exp\left(- \int_0^t G_s\, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t G_s^2\, ds \right)$$

unter P ein Martingal mit $E_P[Z_t] = 1$ ist.

b) Sei Q eine bzgl. P lokal absolutstetige WV mit Dichte

$$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} \;=\; Z_t\,.$$

Zeige, daß X_t unter Q eine Brownsche Bewegung ist. *(Anleitung: Verfahre wie in Aufgabe 5.1 c)).*

3. (Girsanovtransformation in diskreter Zeit). Führe alle Schritte im Beweis von Satz 9.2 im Detail aus.