Stochastische Analysis I WS 2004/05 Blatt 5

1. (Satz von Cameron–Martin). Sei

$$X_t \;=\; B_t + h_t \qquad (0 \le t \le 1)$$

mit einer Brownschen Bewegung B_t auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, und einer absolutstetigen Funktion $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $h' \in L^2([0,1], dt)$. *[Aus der Perspektive stochastischer Differentialgleichungen ist X_t die Lösung der Gleichung*

$$dX_t \;=\; dB_t + h'_t\,dt \tag{1}$$

mit deterministischem Drift. Aus der Perspektive der Analysis auf dem Raum der Pfade ist $X = (X_t)_{0\le t\le 1}$ die Verschiebung des Brownschen Pfades um den konstanten (von ω unabhängigen) Richtungsvektor h]. Zeige :

a) Für $0 < s < t \le 1$ sind die Wienerintegrale $\int_0^s h'_u\,dB_u$ und $\int_s^t h'_u\,dB_u$ unabhängig und zentriert normalverteilt mit Varianz $\int_0^s (h'_u)^2\,du$ bzw. $\int_s^t (h'_u)^2\,du$. Insbesondere gilt

$$E_P\left[\exp\left(\int_s^t h'_u\,dB_u\right)\right] \;=\; \exp\left(\frac{1}{2}\int_s^t (h'_u)^2\,du\right).$$

b) Folgere, daß

$$G_t \;:=\; \exp\left(-\int_0^t h'_u\,dB_u \;-\; \frac{1}{2}\int_0^t (h'_u)^2\,du\right)$$

unter P ein Martingal mit $E_P[G_t] = 1$ ist.

c) Sei Q die bzgl. P absolutstetige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Dichte $dQ/dP = G_1$. Zeige:

$$E_Q\left[\exp\left(\int_0^1 f_s\,dX_s\right)\right] \;=\; \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^1 f_s^2\,ds\right)$$

für alle $f \in L^2([0,1], dt)$. Berechne die Fouriertransformation

$$\varphi(p_1,\dots,p_n) \;:=\; E_Q\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n p_j \cdot (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\right)\right]$$

der Verteilung unter Q von $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots t_n$.

Folgere, daß der Prozeß $(X_t)_{0 \le t \le 1}$ unter der Wahrscheinlichkeitsverteilung Q eine Brownsche Bewegung ist.

Der Maßwechsel von P nach Q entfernt also den Drift h'_t aus der stochastischen Differentialgleichung (1), bzw. er macht die Verschiebung des Brownschen Pfades um h rückgängig !

d) Für jede stetige beschränkte Funktion $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ gilt:

$$E_P[F(X)] \;=\; E_Q\left[F(X) \cdot \exp\left(\int_0^1 h'_s \, dX_s - \frac{1}{2} \int_0^1 (h'_s)^2 \, ds \right) \right] .$$

Folgere: Die Verteilung auf $C([0,1])$ von X unter P ist absolutstetig bzgl. des Wienermaßes mit Dichte

$$\exp\left(\int_0^1 h'_s \, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^1 (h'_s)^2 \, ds \right) ,$$

wobei $W_s(\omega) := \omega(s)$ die kanonische Brownsche Bewegung auf dem Wienerraum ist. Vergleiche auch mit der Beweisskizze aus der Vorlesung W'theorie II, 20.10.

2. (Zeittranformation). Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Start in 0.

a) Zeige, daß

$$X_t \;:=\; (1-t)\, B_{\frac{t}{1-t}} \quad \text{für } t < 1 \,, \qquad X_1 \;:=\; 0 \,,$$

eine Brownsche Brücke von 0 nach 0 ist. Wie kommt man ausgehend von der stochastischen Differentialgleichung der Brownschen Brücke zu dieser Darstellung ?

b) Sei V_t der durch

$$dV_t \;=\; -V_t \, dt \;+\; dB_t \,, \qquad V_0 = 0 \,,$$

definierte Ornstein–Uhlenbeck–Prozeß, und $T_a^V := \inf\{t > 0 | V_t \geq a\}$, $a > 0$. Stelle den Prozeß über eine zeittransformierte Brownsche Bewegung $\tilde{B}_t$ dar, und zeige:

$$P[T_a^V \leq t] \;=\; P[\tilde{T}_a \leq e^{2t} - 1]\,,$$

wobei $\tilde{T}_a := \inf\{s \geq 0 | \tilde{B}_s \geq a\sqrt{1+2s}\}$. Wie könnte man dies benutzen, um die Austrittswahrscheinlichkeit $P[T_a^V \leq t]$ für kleine t explizit abzuschätzen ?

3. (Integration bzgl. eines Itôprozesses). Sei

$$I_s \;:=\; \int_0^s H_u\,dB_u \qquad (0 \leq s \leq t)$$

mit einer $(\mathcal{F}_s)$–Brownschen Bewegung B_s auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und einem $(\mathcal{F}_s)$–adaptierten Prozeß $H \in L^2(P \otimes \lambda)$. τ_n sei eine Partitionenfolge von $[0,t]$ mit $|\tau_n| \to 0$. Zeige:

a) Ist $(G_s)_{0 \leq s \leq t}$ ein weiterer $(\mathcal{F}_s)$–adaptierter, stetiger, beschränkter Prozeß, dann konvergieren die Riemannsummen $\sum_{s \in \tau_n} G_s \cdot (I_{s'} - I_s)$ in $L^2(P)$, und es gilt

$$\int_0^t G_s\,dI_s \;:=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{s\in\tau_n} G_s \cdot (I_{s'} - I_s) \;=\; \int_0^t G_s\,H_s\,dB_s \quad P\text{–f.s.}$$

Hinweis: Drücke die Riemannsummen als stochastische Integrale $\int_0^t \ldots\, dB_s$ bzgl. der Brownschen Bewegung aus).

b) Ist H stetig und beschränkt, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{s\in\tau_n}\left(\int_s^{s'} (H_u - H_s)\,dB_u\right)^2\right] \;=\; 0\,.$$

Folgere:

$$\langle I\rangle_t \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{s\in\tau_n} (I_{s'} - I_s)^2 \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{s\in\tau_n} H_s^2 \cdot (B_{s'} - B_s)^2 \;=\; \int_0^t H_s^2\,ds$$

bzgl. stochastischer Konvergenz, bzw. P–f.s. entlang einer Teilfolge.

4. (Itô–Diffusionen II). Zeige mithilfe von Aufgabe 3 :
Ist X_t auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t \;=\; \sigma(X_t)\, dB_t$$

mit $\sigma \in C_b(\mathbb{R})$, dann löst (X_t) das Martingalproblem zum Operator

$$\left(\sigma(x)^2 \, \frac{d^2}{dx^2} \,,\, C_b^2(\mathbb{R}) \right) .$$

5. (Ein divergentes stochastisches Integral). Sei

$$B_t(\omega) \;=\; Y(\omega) \cdot t \,+\, \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} Y_{n,k}(\omega)\, e_{n,k}(t) \qquad (0 \le t \le 1)$$

mit Y, $Y_{n,k}$ unabhängig und $N(0,1)$ verteilt, die Wiener–Lévy–Darstellung einer Brownschen Bewegung. Wie in der Vorlesung setzen wir

$$\begin{aligned}
\Delta_{n,k} B &:= B_{(k+1)2^{-n}} - B_{k2^{-n}} \,, \\
\Delta_{n,k}^{-} B &:= B_{(k+\frac{1}{2})2^{-n}} - B_{k2^{-n}} \;\; (= \Delta_{n+1,2k} B) \,, \\
\Delta_{n,k}^{+} B &:= B_{(k+1)2^{-n}} - B_{(k+\frac{1}{2})2^{-n}} \;\; (= \Delta_{n+1,2k+1} B) \,.
\end{aligned}$$

Dann gilt $\Delta_{0,0} B = Y$ und

$$\begin{aligned}
\Delta_{n,k}^{-} B &= \frac{1}{2}\, \Delta_{n,k} B \,+\, 2^{-n/2}\, Y_{n,k} \,, \\
\Delta_{n,k}^{+} B &= \frac{1}{2}\, \Delta_{n,k} B \,-\, 2^{-n/2}\, Y_{n,k} \,.
\end{aligned}$$

(Begründung durch Skizze ?)

Sei H_t $(0 \le t \le 1)$ ein weiterer stetiger stochastischer Prozeß mit Entwicklung

$$H_t(\omega) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} Z_{n,k}(\omega)\, e_{n,k}(t) \tag{2}$$

bzgl. der Schauderfunktionen. Wir wollen H so konstruieren, daß die Riemannsummen

$$S_n \;:=\; \sum_{s \in \tau_n} H_s \cdot (B_{s'} - B_s)$$

bzgl. der dyadischen Partitionen $\tau_n = \{k2^{-n} \,|\, 0 \le k < 2^n\}$ für $n \to \infty$ P–f.s. divergieren.

a) Zeige:

$$S_{n+1} - S_n \;=\; \sum_k \Delta^-_{n,k} H \, \Delta^+_{n,k} B \,.$$

Folgere: Gilt

$$(3) \qquad \Delta^-_{n,k} H \;=\; \Delta^+_{n,k} B \qquad \forall\, n \ge 0,\; 0 \le k < 2^n \,,$$

dann konvergiert $S_{n+1} - S_n$ in $L^2(P)$ gegen $\frac{1}{2}$, und S_n divergiert P–f.s.

b) Zeige:

$$(3) \quad \Leftrightarrow \quad Z_{n,k} = -Y_{n,k} + 2^{-1+n/2}(\Delta_{n,k} B - \Delta_{n,k} H)\,.$$

In diesem Fall gilt zudem:

$$\begin{aligned} \Delta^-_{n,k} B - \Delta^-_{n,k} H \;&=\; \Delta^-_{n,k} B - \Delta^+_{n,k} B \;=\; 2^{1-n/2} Y_{n,k} \qquad \text{und} \\ \Delta^+_{n,k} B - \Delta^+_{n,k} H \;&=\; \Delta^-_{n,k} H - \Delta^+_{n,k} H \;=\; 2^{1-n/2} Z_{n,k}\,. \end{aligned}$$

Folgere: Definiert man $Z_{n,k}$ rekursiv durch $Z_{0,0} = 0$,

$$(4) \qquad Z_{n,k} \;:=\; \begin{cases} -Y_{n,k} + Y_{n-1,[k/2]} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -Y_{n,k} + Z_{n-1,[k/2]} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \,,$$

dann gilt (3) für alle $n \ge 0$ und $0 \le k < 2^n$.

c) Zeige ähnlich wie im Beweis des Satzes von Lévy (s. Wtheorie II, 21.7), daß für $Z_{n,k}$ wie in (4) die Reihe (2) P–f.s. gleichmäßig konvergiert.

Bemerkung: Nach Wtheorie II, Übung 13.3, gilt

$$\sum_k (\Delta_{n,k} H)^2 = 2^{-n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^m-1} Z^2_{m,k}.$$

Hieraus kann man folgern, daß der Prozeß H_t P–f.s. endliche quadratische Variation $\langle H \rangle_1$ entlang (τ_n) hat.