Stochastische Analysis I WS 2004/05 Blatt 4

1. (Itô–Diffusionen I). Sei $b \in C_b(\mathbb{R})$, und sei $(X_t)_{t\geq 0}$ bzgl. P_x eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t \;=\; b(X_t)\,dt \;+\; dB_t\;, \qquad X_0 = x\ P_x\text{–f.s.},$$

mit einer eindimensionalen Brownschen Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$. Zeige:

a) X_t löst bzgl. P_x das *zeitabhängige Martingalproblem* zum Generator

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} \;+\; b(x)\cdot\frac{d}{dx}\;,$$

d.h. für alle $u \in C^{1,2}$ ist

$$M_t \;:=\; u(t,X_t) - u(0,X_0) - \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u\right)(X_s)\,ds$$

ein lokales Martingal.

b) Für $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ gilt die *Kolmogorovsche Vorwärtsgleichung*

$$E_x[f(X_t)] \;=\; f(x) \;+\; \int_0^t E_x[\mathcal{L}f(X_s)]\,ds\,.$$

c) $\mu_t(A) := P_\mu[B_t \in A]$ ist eine Lösung (im distributionellen Sinn) von

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} \;=\; \mathcal{L}^*\mu_t\ \text{, d.h.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f\,d\mu_t \;=\; \int \mathcal{L}f\,d\mu_t \qquad \forall\, f \in C_b^2\,.$$

d) *Rückwärtsgleichung:* Für $f \in C_b(\mathbb{R})$ ist

$$u(t,x) = E_x[f(X_t)] \tag{1}$$

die eindeutige beschränkte Lösung von

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \mathcal{L}u\;, \qquad u(0,x) = f(x)\,.$$

(Existenz einer beschränkten Lösung kann vorausgesetzt werden; es ist also nur zu zeigen, daß für jede beschränkte Lösung die Darstellung (1) gilt.)

2. (Stochastischer Oszillator).

a) Seien A und σ $d \times d$–Matrizen, und B_t eine Brownsche Bewegung im $\mathbb{R}^d$. Zeige mithilfe von Variation der Konstanten, daß die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ_t \;=\; AZ_t\,dt \;+\; \sigma\,dB_t\;, \qquad Z_0 = z_0,$$

durch

$$Z_t \;=\; e^{tA}Z_0 \;+\; \int_0^t e^{(t-s)A}\sigma\,dB_s \qquad \text{gegeben ist.}$$

b) Kleine Auslenkungen aus Gleichgewichtszuständen (z.B. bei einem Pendel) mit stochastischer Rückstellkraft beschreibt man durch stochastische Differentialgleichungen vom Typ

$$\begin{aligned} dX_t &= V_t\,dt \\ dV_t &= -X_t\,dt \;+\; dB_t \end{aligned}$$

mit einer eindimensionalen Brownschen Bewegung B_t
(in komplexer Notation: $dZ_t = -iZ_t\,dt \;+\; i\,dB_t\,,\; Z_t = X_t + iV_t$.)
Löse die SDgl mit Anfangsbedingung $X_0 = x_0$, $V_0 = v_0$. Zeige, daß X_t eine normalverteilte Zufallsvariable ist, deren Mittelwert durch die Lösung der entsprechenden deterministischen Gleichung gegeben ist. Für die Varianz gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{var}\,(X_t) \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

3. (Komplexe Itôformel). Eine komplexwertige Brownsche Bewegung ist gegeben durch $B_t \;=\; B_t^1 + i\,B_t^2$ mit unabhängigen eindimensionalen Brownschen Bewegungen B_t^1 und B_t^2.

a) Zeige: Ist F holomorph, dann gilt

$$F(B_t) \;=\; F(B_0) \;+\; \int_0^t F'(B_s)\,dB_s\;.$$

b) Löse die komplexe SDgl $\quad dZ_t \;=\; \alpha\,Z_t\,dB_t\;, \quad \alpha \in \mathbb{C}\,.$

4. (Austrittszeiten und Eigenwerte). Sei T die Austrittszeit der eindimensionalen Brownschen Bewegung aus dem Intervall $(-1,1)$.

a) Zeige: Für $\alpha < 0$, $\alpha \notin \{-(2k-1)^2\pi^2/8 |\, k \in \mathbb{N}\}$, ist $u_\alpha(x) = \frac{\cos(x\sqrt{-2\alpha})}{\cos\sqrt{-2\alpha}}$ die eindeutige stetige Lösung des Randwertproblems

$$\frac{1}{2}\, u_\alpha'' \;=\; \alpha\, u_\alpha \text{ auf } (-1,1), \qquad u_\alpha(1) = u_\alpha(-1) = 1\,.$$

An den Eigenwerten $\alpha = -(2k-1)^2\pi^2/8$ existiert keine Lösung des inhomogenen Randwertproblems.

b) Zeige mithilfe des Lemmas von Fatou, daß für $\alpha \in (-\pi^2/8, 0)$

$$E_x\left[e^{-\alpha T}\right] \;\le\; u_\alpha(x) \;<\; \infty \qquad \text{gilt.}$$

c) Folgere

$$E_x\left[e^{-\alpha T}\right] \;=\; u_\alpha(x) \;\text{ für } \alpha \in \left(-\frac{\pi^2}{8}, 0\right), \quad = \infty \;\text{ für } \alpha \le \frac{-\pi^2}{8}\,.$$

5. (Feynman–Kac und Börsenkurse). Ein Börsenkurs werde durch eine geometrische Brownsche Bewegung X_t mit Parametern $\alpha, \mu > 0$ beschrieben. Bei Kurshöhe x fallen pro Zeiteinheit Kosten $V(x)$ an — die Gesamtkosten bis zur Zeit t betragen dann

$$A_t \;=\; \int_0^t V(X_s)\, ds\;.$$

a) Leite aus der Feynman–Kac–Formel für die Brownsche Bewegung eine PDgl für die Laplacetransformation

$$u(t,x) \;=\; E_x\left[e^{-\beta A_t}\right] \qquad (\beta > 0) \qquad \text{von } A_t \text{ her.}$$

b) Ähnlich wie in Aufgabe 1 zeigt man mithilfe der stochastischen Differentialgleichung der geometrischen Brownschen Bewegung, daß X_t das zeitabhängige Martingalproblem zum Generator

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{\alpha^2}{2}\, x^2\, \frac{d^2}{dx^2} \;+\; \mu\, x\, \frac{d}{dx}$$

löst. Folgere unter geeigneten Voraussetzungen, daß $u(t,x)$ auch die PDgl

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \mathcal{L}u \;-\; \beta V u \qquad \text{löst.}$$

6. (Wärmeleitung in einem endlichen Stab). Sei $u \in C^{1,2}((0,\infty)\times(a,b))$ $(-\infty < a < b < \infty)$ eine bis zum Rand stetige, beschränkte Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \;-\; V(x)\,u(t,x) \qquad \text{mit}$$

$$u(0,x) = f(x), \quad u(t,a) = h(t), \quad u(t,b) = k(t),$$

$V : (a,b) \to [0,\infty)$ stetig und beschränkt. Zeige mithilfe eines geeigneten Martingals:

$$\begin{aligned} u(t,x) \;&=\; E_x\left[f(B_t)\,\exp\left(-\int_0^t V(B_s)\,ds\right)\;;\; t \le T_a \wedge T_b\right] \\ &=\; E_x\left[h(t-T_a)\,\exp\left(-\int_0^{T_a} V(B_s)\,ds\right)\;;\; T_a < t \wedge T_b\right] \\ &=\; E_x\left[k(t-T_b)\,\exp\left(-\int_0^{T_b} V(B_s)\,ds\right)\;;\; T_b < t \wedge T_a\right]. \end{aligned}$$

7. (Allgemeines Randwertproblem für den Laplaceoperator). Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, und sei $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ Lösung von

$$\frac{1}{2}\,\Delta u - V u \;=\; -g \;\text{ auf } U\,, \qquad u = f \;\text{ auf } \partial U\,,$$

wobei $g \in C_b(U),\ f \in C(\partial U),\ V \in C(U)$ mit $E_x[\exp \int_0^T V^-(B_s)\,ds] < \infty$ für alle $x \in U$, $T := T_{U^c}$. Zeige:

$$u(x) \;=\; E_x\left[f(B_T)\,e^{-\int_0^T V(B_s)\,ds}\right] \;+\; E_x\left[\int_0^T g(B_t)\,e^{-\int_0^t V(B_s)\,ds}\,dt\right].$$