Stochastische Analysis I WS 2004/05 Blatt 3

1. (Besselprozeß). Für $d \geq 2$ sei $R_t = |B_t|$, wobei B_t eine d–dimensionale Brownsche Bewegung mit Start in $x \neq 0$ ist.

a) Zeige, daß R_t die stochastische Differentialgleichung

$$(1) \qquad dR_t \;=\; dW_t + \frac{d-1}{2R_s}\,ds\,, \qquad R_0 = |x|\,,$$

mit einer eindimensionalen Brownschen Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$ löst.
(Anleitung: Zeige zunächst, daß (1) mit einem stetigen lokalen Martingal W_t gilt, und folgere mithilfe des Satzes von Lévy, daß W_t eine Brownsche Bewegung ist.)

b) Sei $Z = \inf_{t\geq 0} R_t$. Zeige: Für $d = 2$ gilt $Z = 0$ P–f.s.
Für $d \geq 3$ ist Z *Beta-verteilt*:

$$P[Z \leq c] \;=\; \left(\frac{c}{|x|}\right)^{d-2}.$$

2. (Itô–Isometrie). Sei B_t $(t \geq 0)$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Für einen elementaren previsiblen Prozeß

$$H_t(\omega) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} A_i(\omega)\cdot I_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

($n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, A_i beschränkt und $\mathcal{F}_{t_i}$–meßbar) sei

$$(H.B)_t \;:=\; \int_0^t H_s\,dB_s \;:=\; \sum_{t_i<t} A_i\cdot(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i})\,.$$

Zeige, daß $H.B$ ein stetiges Martingal mit

$$E[(H.B)_t^2] \;=\; E\left[\int_0^t H_s^2\,ds\right]$$

ist. Wie kann man diese Isometrie benutzen, um $\int_0^t H_s\,dB_s$ für eine größere Klasse von Integranden H zu definieren ?

3. (Dirichletproblem im Halbraum). Sei T die Austrittszeit der d–dimesionalen ($d \geq 3$) Brownschen Bewegung B_t ($t \geq 0$) aus dem Halbraum $U = \{x \in \mathbb{R}^d |\, x^d > 0\}$. Zeige:

a) Für $f \in C_b(\partial U)$ ist $h(x) = E_x[f(B_T)]$ die einzige beschränkte, die minimale nach unten beschränkte, sowie die maximale nach oben beschränkte Lösung des Dirichletproblems $\Delta h = 0$ auf U, $h = f$ auf ∂U.

b) Berechne h explizit (mit stochastischen Methoden), und leite die Poissonformel für den Halbraum her.

4. (Randregularität: Kegelbedingung und Lebesguesche Nadel). Sei $U \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, offen, und sei $y \in \partial U$. Zeige:

a) Existiert ein offener Kegel $y + C$ und $\varepsilon > 0$ mit $(y+C) \cap B(y,\varepsilon) \subset U^c$, dann ist y regulär.

b) Sei $U = (-1,1)^3 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$,

$$F_n \ := \ \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2^{-n} \leq x_1 \leq 2^{-n+1},\, x_2^2 + x_3^2 \leq \varepsilon_n\}\,.$$

Zeige: Gilt $\varepsilon_n \downarrow 0$ schnell genug, dann ist 0 ein irregulärer Randpunkt von U.

5. (Starke Markoveigenschaft). Sei $\Omega = D([0,\infty), \mathbb{R}^d)$ der Raum aller rechtsstetigen Funktionen $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ mit linksseitigen Limiten, und sei $\mathcal{A} = \sigma(X_t |\, t \geq 0)$, $X_t(\omega) := \omega(t)$. Der kanonische Prozeß $(X_t)_{t \geq 0}$ sei bzgl. der Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_x ($x \in \mathbb{R}^d$) ein zeitlich homogener Markovprozeß mit Start in x und Übergangskernen $p_t(x, dy)$ ($t \geq 0$). Zeige:

a) Der Prozeß (X_t, P_x) hat die *Markoveigenschaft* bzgl. der Filtration

$$\mathcal{F}_t \ := \ \bigcap_{x \in \mathbb{R}^d} \mathcal{F}_t^{X,P_x}\,.$$

b) Ist $T : \Omega \to [0, \infty)$ eine $(\mathcal{F}_t)$–Stoppzeit, die nur *abzählbar viele Werte* annimmt, dann gilt die *starke Markoveigenschaft*

$$E_x[F \circ \Theta_T | \mathcal{F}_T] \;=\; E_{X_T}[F] \qquad P_x\text{–f.s. } \forall\, F \geq 0 \;\mathcal{A}\text{–meßbar.}$$

c) Sind die Übergangskerne *Feller*, d.h.

$$f \in C_0(\mathbb{R}^d) \;\Rightarrow\; p_t f \in C_0(\mathbb{R}^d)$$

wobei $C_0(\mathbb{R}^d) := \{f \in C(\mathbb{R}^d) \mid \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0\}$, dann ist

$$x \;\mapsto\; E_x[F] \qquad \text{stetig}$$

für alle Zylinderfunktionen vom Typ $F = \prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})$ ($n \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $f_i \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

d) Für eine beliebige $(\mathcal{F}_{t+})$ Stoppzeit $T : \Omega \to [0, \infty)$ gilt

$$\mathcal{F}_{T+} \;=\; \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}\,,$$

wobei $T_n := ([2^n T] + 2)/2^n$. Sind die Übergangskerne Feller, dann folgt:

$$\text{(2)} \qquad E_x[F \circ \Theta_T | \mathcal{F}_{T+}] \;=\; E_{X_T}[F] \qquad P_x\text{–f.s.}$$

für alle Zylinderfunktionen F wie oben, und damit für alle $\mathcal{A}$–meßbaren $F \geq 0$.

e) Folgere aus (2) das *0-1–Gesetz von Blumenthal*:

$$P_x[A] \in \{0, 1\} \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_{0+}.$$