Stochastische Analysis I WS 2004/05 Blatt 2

1. (Geometrische Brownsche Bewegung). Eine geometrische Brownsche Bewegung mit Parametern $\mu, \alpha \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t \;=\; \mu\, X_t\, dt \;+\; \alpha\, X_t\, dB_t\,.$$

Sie wird z.B. zur Modellierung von Aktienkursen eingesetzt.

a) Finde eine Lösung der SDgl mit Anfangsbedingung $X_0 = x_0$ mithilfe des Ansatzes

$$X_t \;=\; x_0 \cdot e^{aB_t + bt}\,.$$

b) Berechne $E[X_t]$ für $t \geq 0$. Was fällt auf im Fall $0 < \mu < \alpha^2/2$? Berechne $\mathrm{cov}\,(X_s, X_t)$.

2. (Satz von Lévy). Zeige:

a) Ist B_t $(t \geq 0)$ eine Brownsche Bewegung und $c > 0$, so ist auch $\sqrt{c}\,B_{t/c}$ eine Brownsche Bewegung.

b) Sind $B_t^1, \ldots, B_t^n$ unabhängige Brownsche Bewegungen, so ist auch

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} B_t^i \qquad \text{eine Brownsche Bewegung.}$$

3. (Ein lokales Martingal, das kein Martingal ist).
Sei B_t $(t \geq 0)$ eine dreidimensionale Brownsche Bewegung mit Startpunkt $x \neq 0$. Zeige:

a) $X_t = 1/|B_t|$ ist ein lokales Martingal bis $T = \infty$.

b) $E[|X_t|^p] < \infty$ für alle $p < 3$ und $t \geq 0$. Insbesondere ist $\{X_s \,|\, 0 \leq s \leq t\}$ gleichmäßig integrierbar.

c) X_t ist *kein* Martingal.

4A. (Stratonovichintegral). Sei $X : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit stetiger quadratischer Variation bzgl. der Partitionenfolge (τ_n), und sei $F \in C^2(\mathbb{R})$. Zeige:

$$\exists \int_0^t F'(X_s) \circ dX_s \;:=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{s\in\tau_n \\ s'\le t}} F'(X_{\frac{s+s'}{2}})(X_{s'} - X_s) \;=\; F(X_t) - F(X_0)\,.$$

Demonstriere anhand eines konkreten Beispiels, daß das Stratonovichintegral bzgl. der Brownschen Bewegung im allgemeinen kein lokales Martingal ist.

4B. Formuliere und beweise eine zeitabhängige Itô-Formel für eine Brownsche Bewegung im $\mathbb{R}^d$.

5. (Stochastische Darstellung der Lösung des Poissonproblems). Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Zeige mithilfe der Itô–Formel: Ist $u \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ eine Lösung des Poissonproblems

$$\frac{1}{2}\Delta u \;=\; -g \quad \text{auf } D\,, \qquad u = f \quad \text{auf } \partial D\,,$$

dann gilt

$$u(x) \;=\; E_x\left[\int_0^{T_D} g(B_t)\,dt\right] \;+\; E_x\left[f(B_{T_D})\right] \qquad \forall\, x \in D\,,$$

wobei B_t bzgl. P_x eine Brownsche Bewegung mit Start in x ist.

6. (Rekurrenz und Transienz der Brownschen Bewegung). Zeige:

a) Für die zweidimensionale Brownsche Bewegung gilt

$$P_x[\forall\, t \ge 0\, \exists\, s \ge t : |B_s| < \varepsilon] \;=\; 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2,\ \varepsilon > 0,\ t \ge 0.$$

Folgere, daß B_t jede nichtleere offene Menge immer wieder besucht.

b) Für die dreidimensionale Brownsche Bewegung gilt $|B_t| \to \infty$ P_x–f.s. für alle x.