Stochastische Analysis I WS 2004/05 Blatt 1

1. (Stieltjeskalkül für Funktionen von beschr. Variation).

a) Definiere das Lebesgue–Stieltjes–Integral

$$\int_0^t f(s)\, dg(s) \tag{1}$$

für eine monoton wachsende stetige Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und eine lokal beschränkte Borel–meßbare Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

b) Für eine stetige Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation sei

$$V_t^{(1)} \ := \ \sup_\tau \sum_i |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \ ,$$

wobei das Supremum über alle Partitionen von $[0, t]$ genommen wird. Zeige, daß $V^{(1)}$ and $V^{(1)} - g$ beide monoton wachsend sind. Benutze dies, um die Definition des Lebesgue–Stieltjes Integrals (1) auf Funktionen g von beschränkter Variation zu erweitern.

c) Sei τ_n eine Partitionenfolge mit $|\tau_n| \to 0$. Zeige: Ist g stetig und von beschränkter Variation und f stetig, dann existiert

$$\int_0^t g(s)\, df(s) \ := \ \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_i \le t}} g(t_i)\, (f(t_{i+1}) - f(t_i))\, ,$$

und es gilt die partielle Integrationsformel

$$\int_0^t f(s)\, dg(s) \ = \ f(t)g(t) \ - \ f(0)g(0) \ - \ \int_0^t g(s)\, df(s) \ , .$$

Insbesondere ist $\int g\, df$ unabhängig von der Wahl der Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (Wiener–Paley Definition von stochastischen Integralen). Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$. Für eine stetige Funktion $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation kann man das Integral $\int_0^1 h(s)\, dB_s$ P–f.s. wie in Aufgabe 1 c) definieren. Zeige :

$$E\left[\int_0^1 h(s)\, dB_s\right] \;=\; 0$$

und

$$E\left[\left(\int_0^1 h(s)\, dB_s\right)^2\right] \;=\; \int_0^1 (h(s))^2\; ds\,.$$

Benutze diese Isometrie um das *Wienerintegral*

$$\int_0^1 h(s)\, dB_s$$

für alle Funktionen $h \in L^2(0,1)$ zu definieren.

3. (Erweiterte Itô–Formel). Sei $X : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit stetiger quadratischer Variation. Zeige, daß für $g \in C^1$ und $F \in C^2$ das Itô–Integral

$$\int_0^t g(X_s)\, dF(X_s)$$

existiert, und die Itô–Formel

$$\int_0^t g(X_s)\, dF(X_s) \;=\; \int_0^t g(X_s)\, F'(X_s)\, dX_s \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t g(X_s)\, F''(X_s)\, d\langle X\rangle_s$$

gilt. Dies rechtfertigt die differentielle Kurzschreibweise

$$dF(X) \;=\; F'(X)\, dX \;+\; \frac{1}{2}\, F''\, d\langle X\rangle\,,$$

der Itô–Formel, denn nun ist auch multiplizieren dieser ,,Gleichung" mit $g(X)$, $g \in C^1$, erlaubt !

4. (Quadratische Variation von Itô–Integralen). Sei $X : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit stetiger quadratischer Variation (bzgl. einer festen Partitionenfolge τ_n mit $|\tau_n| \to 0$).

a) Sei $F \in C^1(\mathbb{R})$. Zeige, daß die Funktion $t \mapsto F(X_t)$ quadratische Variation

$$\langle F(X) \rangle_t \;=\; \int_0^t F'(X_s)^2 \, d\langle X \rangle_s$$

entlang (τ_n) hat.

b) Folgere, daß für $f \in C^1(\mathbb{R})$ das Itô–Integral

$$I_t(f) \;=\; \int_0^t f(X_s) \, dX_s$$

quadratische Variation

$$\langle I(f) \rangle_t \;=\; \int_0^t (f(X_s))^2 \, d\langle X \rangle_s \qquad \text{hat.}$$