Angewandte Stochastik Blatt 7

1. (Gemeinsame Verteilungsdichte)

a) Seien X, Y, Z unabhängige Zufallsvariablen mit Gleichverteilung auf $[0,1]$. Finde die gemeinsame Verteilungsdichte der Zufallsvariablen XY und Z^2 und zeige, dass $\mathbb{P}[XY < Z^2] = \frac{5}{9}$.

b) Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, exponentialverteilt mit Parameter 1 (siehe Blatt 4). Finde die gemeinsame Verteilungsdichte von $U = X + Y$ und $V = X/(X+Y)$ und zeige, dass V auf $[0,1]$ gleichverteilt ist.

2. (Zweistichproben-Problem mit bekannter Varianz bzw. mit bekannten Erwartungswerten)

a) Seien $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Jedes X_i habe die Verteilung $N(m, \sigma^2)$ und jedes Y_j die Verteilung $N(\tilde{m}, \sigma^2)$; Dabei seien die Erwartungswerte $m, \tilde{m}$ unbekannt, aber σ^2 bekannt. Konstruiere zu einem vorgegebenen Irrtumsniveau α einen Konfidenzkreis für $(m, \tilde{m})$.

b) Mit derselben Voraussetzung wie in Teil a) seien die X_i nun $N(m, \sigma^2)$ verteilt mit bekanntem m, und die Y_j seien $N(\tilde{m}, \tilde{\sigma}^2)$ verteilt mit bekanntem $\tilde{m}$. Die Varianzen σ^2 und $\tilde{\sigma}^2$ seien unbekannt. Bestimme ein Konfidenzintervall für $\sigma^2/\tilde{\sigma}^2$ zum Irrtumsniveau α.

3. (Beste lineare Vorhersage) Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sei eine n-dimensionale Normalverteilung. Zeige:

a) $X_1, \ldots, X_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn sie paarweise unkorreliert sind.

b) Es gibt Konstanten $a, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, so dass für $\hat{X}_n := a + \sum_{i=1}^{n-1} a_i X_i$ gilt: $X_n - \hat{X}_n$ ist unabhängig von $X_1, \ldots, X_{n-1}$, und $\mathbb{E}[\hat{X}_n - X_n] = 0$. (Hinweis: Minimiere die quadratische Abweichung $\mathbb{E}[(\hat{X}_n - X_n)^2]$ und verwende a).)