Angewandte Stochastik Blatt 5

1. Beim Sommerfest des Kaninchenzüchtervereins sollen K Kaninchen verlost werden. Dazu werden $N \geq K$ Lose gedruckt, davon K Gewinne, der Rest Nieten. Der kleine Fritz bringt - zum Entsetzen seiner Mutter - x Kaninchen nach Hause, $1 \leq x \leq K$. Wieviele Lose hat er wohl gekauft ? Gib eine Schätzung mittels der Maximum-Likelihood-Methode.

2. (Simulation von Zufallsvariablen). Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ die Verteilungsfunktion einer **reellwertigen** Zufallsvariable Xauf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Zeige : F ist monoton wachsend und rechtsstetig mit

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) \;=\; 1\,.$$

b) Sei $\lambda_{(0,1)}$ die Gleichverteilung auf $(0,1)$. Wie sieht der Graph von F aus, falls die Verteilung von X gleich $\frac{1}{2}\lambda_{(0,1)} + \frac{1}{2}\delta_2$ ist ?

c) Für $u \in (0,1)$ sei

$$\tilde{X}(u) \;:=\; \inf\{x \in \mathbb{R}|\, F(x) \geq u\} \;=\; \sup\{x \in \mathbb{R}|\, F(x) < u\}$$

die „linksstetige verallgemeinerte Inverse" von F. Skizziere $\tilde{X}$ für das Beispiel aus b). Zeige, daß $\tilde{X}$ eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda_{(0,1)})$$

ist, die dieselbe Verteilung wie X unter P hat.

(Ein Element $\omega \in (0,1)$ repräsentiert z.B. eine vom Computer erzeugte „Zufallszahl". Dies liefert eine Möglichkeit, die Zufallsvariable X auf dem Computer zu simulieren. Welche Probleme könnten dadurch entstehen, daß vom Computer erzeugte Zufallszahlen nie wirklich zufällig sind, sondern durch einen deterministischen Algorithmus generiert werden ? Für welche Arten von Verteilungsfunktion könnte es insbesondere Probleme geben ?)

3. (Stetige Verteilungen)

a) Das Intervall $[0, 2]$ werde in zwei Teile zerlegt, indem in $[0, 1]$ zufällig (gemäß der Gleichverteilung) ein Punkt markiert wird. Sei X das Längenverhältnis l_1/l_2 der kürzeren Teilstrecke l_1 zur längeren Teilstrecke l_2. Berechne die Verteilungsdichte von X.

b) Sei X eine reelle Zufallsvariable mit Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Zeige, dass die Zufallsvariable $aX + b$ die Verteilung $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ besitzt.

4. (Sensitivität von Prognosewerten.) Sei $M_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Statistik, welche n reellen Beobachtungswerten einen "Mittelwert" zuordnet. Wie stark M_n bei gegebenen Werten $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ von einer Einzelbeobachtung $x \in \mathbb{R}$ abhängt, wird beschrieben durch die Sensitivitätsfunktion

$$S_n(x) = n(M_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x) - M_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Bestimme und zeichne S_n in den Fällen, wenn M_n (a) der Stichprobenmittelwert, (b) der Stichprobenmedian, und (c) das α-getrimmte Mittel

$$(T_{\lfloor n\alpha \rfloor + 1:n} + \dots + T_{n - \lfloor n\alpha \rfloor :n})/(n - 2\lfloor n\alpha \rfloor)$$

zu einem Trimm-Niveau $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ ist ($\lfloor \beta \rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner gleich β). Hierbei bezeichnet $T_{k:n}(x_1, \dots, x_n)$ die k-te Ordnungsstatistik von $x_1, \dots x_n$.

5. (Gamma- und Beta-Verteilung) Gegeben sei das Produktmodell auf $(0, 1)^n$ mit der Gleichverteilung $P = \lambda^n$. Sei $T_{k:n}$ die k–te Ordnungsstatistik. Zeige: Ist $(s_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $(0, \infty)$ mit $n/s_n \to \alpha > 0$, dann gilt

$$\Gamma_{\alpha,r}((0, t]) = \lim_{n \to \infty} P(s_n T_{r:n} \leq t) \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{N} \text{ und } t > 0.$$

Was bedeutet diese Aussage im Hinblick auf zufällige Zeitpunkte auf der Zeitachse ?

6. Die Anzahl der Bücher, die während eines Jahres aus einer Bibliothek verschwinden, sei Poisson-verteilt. Bei der jährlichen Revision entdeckt man das Fehlen eines Buches mit Wahrscheinlichkeit p; das Buch wird dann ersetzt.

a) Berechne die Anzahl der fehlenden Bücher
   i) nach der Revision
   ii) vor der nächsten Revision.

b) Betrachte die Situation als Markovkette: finde die zugehörige stochastische Matrix $P = (p_{ij})$ und mithilfe von a) eine stationäre Verteilung. Eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung π heißt stationäre Verteilung, falls

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j \qquad \text{für alle } j.$$