Angewandte Stochastik Blatt 3

1. ("Runs" bei Münzwürfen). Eine Münze wird wiederholt geworfen. Die einzelnen Würfe seien unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p für Kopf. Sei E das Ereignis, daß eher r mal hintereinander Kopf als s mal hintereinander Zahl fällt. Sei A der Ausgang des ersten Wurfs. Zeige:

$$P[\,E\,|\,A=\text{Kopf}\,] \;=\; p^{r-1}+(1-p^{r-1})\,P[\,E\,|\,A=\text{Zahl}\,]\,.$$

Finde eine ähnliche Formel für $P[\,E\,|\,A=\text{Zahl}\,]$, und berechne $P[E]$.

2. (Parameterschätzung im Poissonmodell).

a) Definiere den Erwartungswert und die Varianz der Poissonverteilung π_λ mit Parameter $\lambda>0$. Zeige, daß beide den Wert λ haben.

b) Die Anzahl der Zerfälle in einem radioaktiven Material werde durch eine Poissonverteilung modelliert. Berechne den Maximum-Likelihood-Schätzer des Parameters λ basierend auf der beobachteten Zerfallszahl.

c) Zeige:
$$\pi_\lambda(\{k\,|\,|k-\lambda|\geq c\}) \;\leq\; \lambda/c^2\ .$$
Leite ein 95 prozentiges Konfidenzintervall für den Maximum-Likelihood-Schätzer her.

3. Ein Pflanzen-Gen besitze die beiden Allele A und a. Ein klassisches Verfahren zur Züchtung reinrassiger (d.h. homozygoter) Pflanzen vom Genotyp AA bzw. aa ist die Selbstbefruchtung. Begründe, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(y|x) \;:=\; P[\text{Genotyp } y \text{ inGeneration } n+1 \mid \text{Genotyp } x \text{ in Generation } n\,]$$

für den Übergang von einer Generation zur nächsten durch $p(aa|Aa)=p(AA|Aa)=1/4$, $p(Aa|Aa)=1/2$, und $p(aa|aa)=p(AA|AA)=1$ gegeben sind. Berechne für beliebiges n die n-Schritt–Übergangswahrscheinlichkeit

$$p_n(Aa|Aa) \;=\; P[Aa \text{ nach Generation } n \mid Aa \text{ am Anfang}\,]\ .$$

4. (Lineare Regression). Die Länge eines Metallstabs hänge linear von der Temperatur ab:

$$l \;=\; \alpha + \beta \cdot T \qquad\qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \;.$$

Gegeben sind Meßwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Längen bei Temperaturen $T_1, \ldots, T_n$. Zeige unter der Annahme, daß die Meßwerte unabhängig und normalverteilt sind mit der wahren Länge als Mittelwert und fester Varianz σ^2, daß der Maximum Likelihood Schätzer für den unbekannten zweidimensionalen Parameter (α, β) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(x_1, \ldots, x_n) &= \bar{x} - \frac{\bar{T}}{V(T)}\, C(T, X) \\ \hat{\beta}(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{C(T, X)}{V(T)} \end{aligned} \qquad .$$

Hierbei bezeichnet $\bar{x}$ den empirischen Mittelwert von $x_1, \ldots, x_n$, $V(T)$ die empirische Varianz der T_i, und $C(T, X)$ die empirische Kovarianz der T_i und x_i.

5. Aus einer Population von N Tieren wurden a gefangen, markiert, und wieder freigelassen. Zeige, daß die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, daß anschliessend n Tiere gefangen werden müssen, um m markierte darunter zu haben, durch

$$p(n) \;=\; \frac{a}{N}\binom{a-1}{m-1}\binom{N-a}{n-m} \Big/ \binom{N-1}{n-1} \qquad\qquad (m \leq n \leq N - a + m)$$

gegeben ist. Zeige dann, daß

$$\frac{a}{N}\binom{a-1}{m-1}\frac{(N-a)!}{(N-1)!}\sum_{n=m}^{N-a+m} \frac{(n-1)!(N-n)!}{(n-m)!(N-a+m-n)!} \;=\; 1 \;,$$

und, daß der Erwartungswert von n gleich $\frac{N+1}{a+1} m$ ist.