Angewandte Stochastik WS 05/06 Serie 2

1. (Binomial- und Poissonmodelle).

Untersuche für die folgenden Fälle, ob die Binomial-Verteilung die Situation gut beschreibt (zumindest approximativ):

(a) Die Anzahl der ausgefallenen Straßenlichter entlang einer Straße.

(b) Die Anzahl, wie oft ein Arbeiter beim zehnmaligen Ausprobieren einer neuer Maschine einen Fehler macht.

(c) Die Zahl der Raucher in einer Stichprobe von 30 Personen aus einer Population von 300 Menschen.

(d) Die Zahl der Raucher in einer Stichprobe von 30 Personen aus einer Population von 30000 Menschen.

(e) Die Anzahl von Pinguinen, die auf einer Eisscholle gefangen sind.

Betrachte dieselbe Fragestellung in Bezug auf die Poisson-Verteilung für folgende Fälle:

(a') Die Zahl der Telephonanrufe in einem vorgegebenen Zeitintervall.

(b') Die Zahl der Verkehrsunfälle an einer Straßenkreuzung in einem gewissen Zeitraum.

(c') Die Zahl der Verkehrsunfälle an einem Tag im Raum Köln/Bonn.

(d') Die Zahl der Sterne in einem vorgegebenen Raumbereich des Weltalls.

(e') Die Häufigkeit, mit der ein bestimmtes Wort in einem Text bestimmter Länge auftritt.

2. (Überbuchungen).

Fluggesellschaften stellen fest, daß ein Passagier, der einen Platz reserviert hat, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ nicht kommt. Daher verkauft Lyanair immer 100 Tickets für ein Flugzeug mit 95 Plätzen. Berechne die Überbuchungswahrscheinlichkeit p unter der Annahme, daß die einzelnen Passagiere unabhängig voneinander kommen oder wegbleiben. Leite sowohl eine exakte als auch eine näherungsweise Formel für p her, und schätze den numerischen Wert ungefähr ab.

3. Du hast dich im Nationalpark von Bandrika verlaufen. Von den Besuchern in diesem Park sind zwei Drittel Touristen. Fragen nach der Richtung werden von diesen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ richtig beantwortet. Dabei sind Antworten auf wiederholte Fragen unabängig, auch wenn die Frage und die Person dieselben sind. Wenn man hingegen einen Bandrikaner fragt, dann ist die Antwort immer falsch.

(a) Du fragst einen Passanten, ob der Ausgang sich in Richtung Osten oder Westen befindet. Als Antwort erhältst du Osten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das richtig ist ?

(b) Du fragst dieselbe Person nochmals und bekommst dieselbe Antwort. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, nun die richtige Antwort erhalten zu haben, $\frac{1}{2}$ beträgt.

(c) Du richtest dieselbe Frage ein drittes Mal an dieselbe Person mit der Antwort Osten. Wie hoch ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort stimmt ?

(d) Ein viertes Mal wird der geduldige Passant von dir gefragt, doch die Antwort ist wieder Osten. Zeige, dass die Antwort mit Wahrscheinlichkeit $\frac{27}{70}$ richtig ist.

(e) Zeige für den Fall, dass die vierte Antwort Westen wäre, daß die Richtung Osten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ zutrifft.

4. (Polyas Urnenmodell). Eine Urne enthält zur Zeit $n = 0$ je eine rote und eine schwarze Kugel. Vor jedem Zeitpunkt $n = 1, 2, 3, \ldots$ wird eine zufällig ausgewählte Kugel entnommen, und zusammen mit einer neuen Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Sei R_n die Anzahl der roten Kugeln zur Zeit n. Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$p_{n,r} \ := \ P[R_n = r] \qquad (n \geq 0,\ 1 \leq r \leq n+1\,)$$

a) für $n = 1, 2$ und 3, b) allgemein.

5. (Phasenübergang im Ising Modell, Peierls Argument).

In diesem Beispiel soll der Erwartungswert einer Spinvariablen im Ising-Modell so abgeschätzt werden, dass für große β das Vorhandensein zweier verschiedener Maße sichtbar wird (Existenz eines Phasenübergangs).
$(\Omega_+, \mathfrak{P}(\Omega_+), p_\beta^+)$ sei der Wahrscheinlichkeitsraum zum Ising-Modell mit positiven Randbedingungen. Dabei ist die Ereignismenge Ω_+ (wird auch als Zustandsraum oder Konfigurationsraum bezeichnet) mit den Elementarereignissen ω (Zuständen, Konfigurationen) gegeben als

$$\Omega_+ = \{\omega = (\omega_i)_{i\in\Lambda} | \, \omega_i \in \{+1, -1\}, \omega_i = +1 \text{ für } i \in \partial\Lambda\},$$

und die Variablen ω_i sind definiert auf dem Teilgitter $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ mit dem Rand $\partial\Lambda$,

$$\Lambda = \{-N, -N+1, \ldots, N\}^2, \quad \partial\Lambda = \{(x,y) \in \Lambda | \, |x| = N \text{ oder } |y| = N\}.$$

Sei

$$B = \{(i,j) | \, i,j \in \Lambda, |i-j| = 1\}$$

die Menge der "bonds", d.h. der Segmente zwischen nächsten Gitterpunkten i, j. Das diskrete Maß des Ising-Modells ist gegeben als

$$p_\beta^+(\omega) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta \sum_{\{i,j\}\in B} \omega_i \omega_j}, \quad Z_\beta = \sum_{\omega\in\Omega_+} e^{-\beta \sum_{\{i,j\}\in B} \omega_i\omega_j}, \ \beta > 0.$$

Wir definieren das duale Gitter

$$\Lambda^* = \{-N + \frac{1}{2}, -N + \frac{3}{2}, \ldots, N - \frac{1}{2}\}^2,$$

Bezüglich Λ^* assoziieren wir zu jedem bond (i,j) (mit $(i,j) \in \Lambda\times\Lambda\backslash\partial\Lambda \cup \Lambda\backslash\partial\Lambda\times\Lambda$) einen dualen bond $(i,j)^*$, als Segment mit Endpunkten in Λ^*, welches durch die Mitte von (i,j) geht und normal darauf steht. Die Menge dieser dualen bonds werde mit B^* bezeichnet.
Die Idee Peierls war es, das Maß p_β^+ nicht durch die Konfigurationen selbst, sondern mithilfe ihrer Phasenränder auszudrücken. Der Phasenrand $\partial\omega$ einer Konfiguration ω besteht dabei aus jenen dualen bonds, welche die $+$ und $-$ Bereiche voneinander trennen, d.h.

$$\partial\omega = \{(i,j)^* | \, \omega_i \neq \omega_j\}.$$

Nun zur Aufgabe:
(a) Zeige, dass folgende Darstellung gilt:

$$p_\beta^+(\omega) = \frac{e^{-2\beta|\partial\omega|}}{\sum_{\omega\in\Omega_+} e^{-2\beta|\partial\omega|}},$$

dabei bedeutet $|\partial\omega|$ die Anzahl der Segmente in $\partial\omega$.
(b) Gegeben sei eine geschlossene Kurve $\gamma \subset B^*$ und $|\gamma|$ sei ihre Länge, d.h. die Anzahl ihrer Segmente. Zeige, dass

$$p_\beta^+(\{\omega|\,\gamma \subset \partial\omega\}) \le e^{-2\beta|\gamma|}.$$

(c) Folgere daraus, dass

$$p_\beta^+(\{\omega|\,\omega_{(0,0)} = -1\}) \le 2\sum_\gamma e^{-2\beta|\gamma|},$$

wobei die Summe über alle $\gamma \subset B^*$ läuft, die $(0,0)$ umrunden.
(d) Durch Abschätzen der Anzahl der möglichen γ's in (c) mit fester Länge, und anschließender Summation über alle Längen, zeige:

$$p_\beta^+(\{\omega|\,\omega_{(0,0)} = -1\}) \le r(\beta),$$

mit einer Funktion $r(\beta) \to 0$ für $\beta \to \infty$.

Bemerkung. Diese Abschätzungen gelten für alle $i \in \Lambda\backslash\partial\Lambda$ und sind offenbar unabhängig von N. Damit kann man zeigen, dass im Limes $N \to \infty$ ein Maß μ_β^+ existiert mit derselben Abschätzung (Existenz aufgrund eines Kompaktheitsargumentes). Außerdem kann man die Argumente für negative Randbedingungen wiederholen und bekommt so ein Maß μ_β^-. Für hinreichend große β (d.h. niedrige Temperaturen) gilt offensichtlich

$$\mu_\beta^+(\omega(0,0) = -1) \ < \ \frac{1}{2} \ < \ \mu_\beta^-(\omega(0,0) = +1)\ ,$$

d.h. die Maße sind verschieden (*Mehrphasenbereich*). Andererseits kann man zeigen, daß für hinriechend kleine β (d.h. hohe Temperaturen) $\mu_\beta^+ = \mu_\beta^-$ gilt (*Einphasenbereich*).