Angewandte Stochastik Blatt 13

1. (χ^2-Anpassungstest) Ein Algorithmus zur Erzeugung von Pseudozufallsziffern soll getestet werden. Dazu lässt man ihn etwa $n = 10000$ Ziffern $\in \{0, \ldots, 9\}$ erzeugen. Ein Versuch ergab die folgenden Häufigkeiten:

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit	1007	987	928	986	1010	1029	987	1006	1034	1026

Führe zu einem geeigneten Niveau einen χ^2-Anpassungstest auf Gleichverteilung durch.

2. (Tendenz zur Mitte) Bei der Notengebung wird den Lehrern manchmal vorgeworfen, sie neigten dazu, Extremurteile zu vermeiden. In einem Kurs erzielten 17 Schüler folgende Durchschnittsnoten:

1.58	2.84	3.52	4.16	5.36	2.01	3.03	3.56	
4.19	2.35	3.16	3.75	4.60	2.64	3.40	3.99	4.75

Nimm der Einfachheit halber an, dass sich die Durchschnittsnoten aus so vielen Einzelnoten ergeben haben, dass sie als kontinuierlich verteilt betrachtet werden können. Prüfe zum Niveau $\alpha = 0.1$ mit dem χ^2-Anpassungstest die Nullhypothese, dass obige daten $N(3.5, 1)$-verteilt sind. Teile hierzu die relativen Häufigkeiten in sechs Gruppen

$$(-\infty, 1.5],\ (1.5, 2.5],\ (2.5, 3.5],\ (3.5, 4.5],\ (4.5, 5.5],\ (5.5, \infty)$$

ein.

3. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und Poisson-verteilt mit unbekannten Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Finde die verallgemeinerte Likelihood-Quotienten-Statistik zum Prüfen der Hypothese $H_0 : \lambda_1 = \ldots = \lambda_n$ gegen die Alternative beliebiger λ und zeige, dass sie sich durch $Z = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 / \overline{X}$, wobei $\overline{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$, approximieren lässt. Akzeptierst du H_0, wenn du im Fall $n = 7$ den Wert 26.9 für die Test-Statistik beobachtest ?

4. In einem statistischen Experiment werden n Beobachtungen mit Werten in $E = \{0, \ldots, k\}$ gemacht. Es soll die Verteilung der relativen Häufigkeiten der Daten auf E untersucht werden. Die Nullhypothese sei gegeben durch die Binomialverteilungen

$$\alpha(i) = \binom{k}{i} \vartheta^i (1-\vartheta)^{k-i}, \quad 0 \le i \le k,\ \vartheta \in (0,1).$$

Die Alternative bilden alle anderen Verteilungen $\beta = \beta(i)_{0 \le i \le k} \in (0,1)^{k+1}$. Finde den geeigneten Test für dieses Problem.