Angewandte Stochastik Blatt 12

1. (Einseitige Tests) Eine Lehrmittelfirma liefert physikalische Widerstände und behauptet, deren Widerstände seien normalverteilt mit Mittelwert 50 und Standardabweichung 5 (jeweils in Ohm). Gib einen Test für die beiden Testprobleme

a) $H_0 : m \leq 55$ gegen $H_1 : m > 55$

b) $H_0 : v \leq 25$ gegen $H_1 : v > 25$

zum Niveau $\alpha = 0.05$ an (bei Vorliegen von 10 Messungen unter Normalverteilungsannahme; m und v beide unbekannt). Wie lautet die Entscheidung bei folgenden Messergebnissen für 10 Widerstände:

45.9 68.5 56.8 60.0 57.7 63.0 48.2 59.0 55.2 50.6

2. (Test der Funktionsdauer von Geräten) Betrachte das n-fache Produkt des Modells $([0, \infty), \mathcal{B}_{[0,\infty)}, Q_\vartheta : \vartheta > 0)$; dabei sei Q_ϑ die Weibull-Verteilung mit bekannter Potenz $\beta > 0$ und unbekanntem Skalenparameter $\vartheta > 0$, d.h. Q_ϑ habe die Dichtefunktion

$$\varrho_\vartheta(x) = \vartheta \beta x^{\beta-1} \exp(-\vartheta x^\beta).$$

(Dieses Modell beschreibt die zufällige Funktionsdauer von technischen Produkten).

a) Zeige: Unter $Q_\vartheta^{\otimes n}$ hat $T = \vartheta \sum_{i=1}^n X_i^\beta$ die Gamma-Verteilung $\Gamma_{1,n}$.

b) Bestimme einen besten Niveau-α Test φ für die Nullhypothese $H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0$ ("mittlere Lebensdauer überschreitet Minimalwert") gegen $H_1 : \vartheta > \vartheta_0$.

c) Sei $\vartheta_0 = 1$ und $\alpha = 0.01$. Wie groß muss n sein, damit $G_\varphi(2) \geq 0.95$ ist ? Verwende den zentralen Grenzwertsatz.

3. (Zweiseitiger Chiquadrat-Test) Betrachte im zweiparametrigen Gaußschen Produktmodell das zweiseitige Testproblem $H_0 : v = v_0$ gegen $H_1 : v \neq v_0$ mit folgender Entscheidungsvorschrift: H_0 werde akzeptiert, falls $c_1 \leq \frac{n-1}{v_0} V^* \leq c_2$.

a) Berechne die Gütefunktion dieses Tests und zeige: Es gilt

$$\frac{\partial G}{\partial v}(m, v_0) \lesseqqgtr 0 \quad \text{je nachdem, ob} \quad \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{(n-1)/2} \lesseqqgtr e^{(c_2-c_1)/2}.$$

b) Naiv würde man c_1, c_2 so wählen, dass

$$P_{m,v_0}(\frac{n-1}{v_0}V^* < c_1) = P_{m,v_0}(\frac{n-1}{v_0}V^* > c_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

Zeige im Fall $\alpha = 0.02, n = 3$, dass dieser Test verfälscht ist, und skizziere G.

c) Wie kann man einen unverfälschten Test der obigen Bauart konstruieren ?

d) Welche Gestalt hat der zugehörige Likelihood-Quotienten-Test ?

4. (Zwistichproben-Problem) Seien $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_l$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung $N(m, v)$ bzw. $N(m', v)$; m, m' und v seien unbekannt. Zeige: Jeder Likelihood-Quotienten-Test für das Testproblem $H_0 : m \leq m'$ gegen $H_1 : m > m'$ hat einen Ablehnungsbereich der Form $\{T > c\}$ mit der Zweistichproben-t-Statistik

$$T = \sqrt{\frac{kl}{k+l}}\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{V^*}}.$$

Dabei ist $\overline{X} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i, \overline{Y} = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} Y_j, V^* = \frac{1}{k+l-2}(\sum_{i=1}^{k}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{l}(Y_j - \overline{Y})^2)$.

5. (Verfälschte Tests) Zeige, dass im zweiparametrigen Gaußschen Produktmodell kein gleichmäßig bester Test für das einseitige Testproblem $H_0 : m \leq 0$ gegen $H_1 : m > 0$ existiert. Betrachte dazu die für eine feste Varianz besten Gauß-Tests.