Angewandte Stochastik Blatt 10

1. (Simulation der Cauchy-Verteilung) Die Zufallsvariable U sei gleichverteilt auf $[0,1]$. Zeige:

a) Die Zufallsvariable $Y = \tan \pi(U - \frac{1}{2})$ besitzt die Verteilungsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \tag{1}$$

Bemerkung: Allgemein heißt eine Verteilung mit Dichte

$$f(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + (x-m)^2)}$$

Cauchy-Verteilung mit Breite $a > 0$ und Median $m \in \mathbb{R}$.

b) Wählt man unabhängige, auf $[-1,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen V, W solange bis $V^2 + W^2 \leq 1$, so hat die Zufallsvariable $Y = V/W$ die Dichte wie in (1).

2. (Alternativtest) Bei einer Razzia findet die Polizei bei einem Glückspieler eine Münze, von der ein anderer Spieler behauptet, dass "Zahl" mit einer Wahrschinlichkeit von $p = 0.75$ statt mit $p = 0.5$ erscheint. Aus Zeitgründen kann die Münze nur $n = 10$ Mal überprüft werden. Wähle Nullhypothese und Alternative gemäß dem Grundsatz "In dubio pro reo" und gib einen zugehörigen besten Test zum Irrtumsniveau $\alpha = 0.01$ an.

3. (Minimax Tests und Bayes-Tests)

a) Betrachte ein einfaches Alternativ-Standardmodell $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}; \mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1)$. Ein Test $C \subseteq \mathcal{A}$ heißt ein Minimax-Test, wenn das Maximum der Irrtumswahrscheinlichkeiten erster und zweiter Art minimal ist. Zeige: Es gibt einen Neyman-Pearson Test C mit $\mathbb{P}_0[C] = \mathbb{P}_1[C^c]$, und dieser ist ein Minimax-Test.

b) Sei $C \subseteq \mathcal{A}$ ein Test in obigem Modell, und seien $\alpha_0, \alpha_1 > 0$. Zeige: Genau dann minimiert C die gewichteten Wahrscheinlichkeiten $\alpha_0 \mathbb{P}_0[C] + \alpha_1 \mathbb{P}_1[C]$, wenn C ein Neyman-Pearson Test zum Schwellenwert α_0/α_1 ist. C heißt dann ein Bayes-Test zur Vorbewertung (α_0, α_1).

4. (Entropiemaximierende Verteilungen) Die (absolute) Entropie eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ν mit Dichte $f > 0$ ist definiert als $H(\nu) = -\int f(x) \log f(x) dx$ im stetigen Fall und als $H(\nu) = -\sum f(x) \log f(x)$ im diskreten Fall. Zeige:

a) Die geometrische Verteilung mit Parameter $p \in (0,1)$ hat maximale Entropie unter allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ν auf $\mathbb{N}$ mit Mittelwert $\frac{1}{p}$.

b) Die Normalverteilung $N(m, \sigma^2)$ hat maximale Entropie unter allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}$ mit Mittelwert m und Varianz σ^2. (Ansatz: $H(\nu) = -H(\nu|\mu) + \cdots$).

5. (Exponentielle Familien als Minimierer der relativen Entropie) Sei

$$f(x|\vartheta) = \frac{1}{Z(\vartheta)} e^{\vartheta T(x)} h(x), \quad x \in \mathfrak{X}, \vartheta \in \mathbb{R},$$

eine exponentielle Familie in Normalform mit $Z(\vartheta) = \int_{\mathfrak{X}} e^{\vartheta T(x)} h(x) dx < \infty, \forall \vartheta$. Sei μ_θ das W-Maß mit Dichte $f(x|\vartheta)$ und $\mu := \mu_0$. Zeige für $\vartheta \in \mathbb{R}$:

a) $H(\nu|\mu) = H(\nu|\mu_\vartheta) + \vartheta \int T d\nu + \log \frac{Z(0)}{Z(\vartheta)}$ für alle bezüglich μ absolutstetigen W-Maße ν mit $T \in \mathcal{L}^1(\nu)$.

b) μ_ϑ hat minimale relative Entropie $H(\cdot|\mu)$ unter allen W-Maßen ν mit $\int T d\nu = m(\vartheta) := \int T d\mu_\vartheta$.