**Institut für Angewandte Mathematik**
**Wintersemester 2023/24**
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

# 9. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

**Abgabe bis Montag 11.12 um 12 Uhr.**

---

**1. (Gesetz der großen Zahlen für korrelierte Zufallsvariablen)**
Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, quadratintegrierbare Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit festem Erwartungswert $\mathbb{E}[X_n] = m \;\forall\, n \in \mathbb{N}$. Es gelte

$$|\mathrm{Cov}\,[X_i, X_j]| \;\leq\; c_{|i-j|} \qquad \forall\, i, j \in \mathbb{N}$$

mit endlichen Konstanten $c_n \in (0, \infty)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Beweisen Sie die folgenden Erweiterungen der $L^2$-Versionen des schwachen und starken Gesetzes der großen Zahlen:

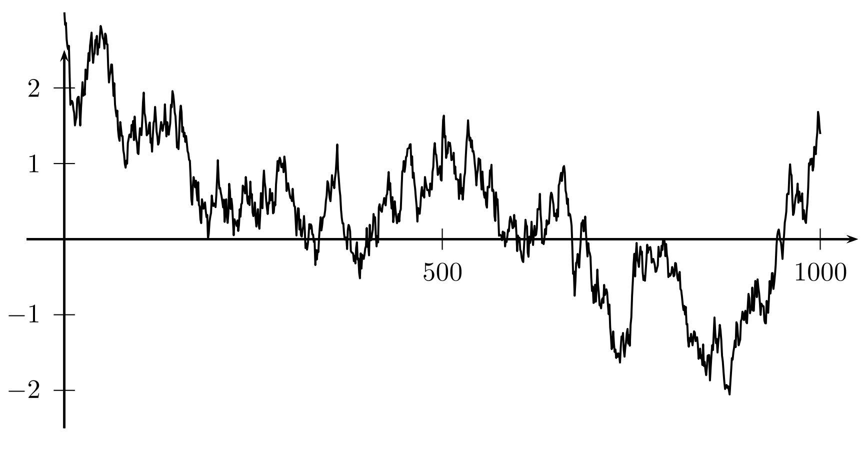
a) Konvergiert $c_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to m \qquad \text{in } L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \text{ und } \mathbb{P}\text{-stochastisch.}$$

b) Gilt sogar $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, dann ist $\mathrm{Var}[S_n/n]$ von der Ordnung $O(1/n)$, und es folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to m \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

c) Folgern Sie, dass ein starkes Gesetz der großen Zahlen gilt, wenn die Zufallsvariablen $X_i$ durch einen stationären AR(1)-Prozess (siehe Blatt 8 Aufgabe 1) mit $\alpha \in (-1, 1)$ und $X_0 \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2})$ gegeben sind.



**2. (Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen - WICHTIG)** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $p \in [1, \infty)$.

a) Zeigen Sie: Konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen 0, dann existiert eine Teilfolge $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die $\mathbb{P}$-fast sicher gegen 0 konvergiert.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass aus $L^p$-Konvergenz von $X_n$ gegen 0 stochastische Konvergenz folgt. Zeigen Sie, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

c) Wir setzen nun zusätzlich voraus, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|^p$ integrierbar ist. Zeigen Sie, dass dann aus $\mathbb{P}$-fast sicherer bzw. $\mathbb{P}$-stochastischer Konvergenz von $X_n$ gegen 0 auch $L^p$-Konvergenz folgt.

**3. (Hölder-Ungleichung)** Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, und $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Leiten Sie die Hölder-Ungleichung

$$\mathbb{E}|X \cdot Y| \;\leq\; \|X\|_{L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})} \cdot \|Y\|_{L^q(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})}$$

aus der Jensenschen Ungleichung her.
*(Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass o.B.d.A. $X, Y \geq 0$ und $\mathbb{E}[|Y|^q] = 1$ vorausgesetzt werden kann. Stellen Sie dann $\mathbb{E}[XY]$ als Erwartungswert bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$ mit relativer Dichte $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = Y^q$ dar.)*

**4. (Unabhängigkeit und Unkorreliertheit)** Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie:

a) Sind $X$ und $Y$ unabhängig, dann ist $X \cdot Y$ in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, und

$$\mathbb{E}[XY] \;=\; \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

b) Ist die gemeinsame Verteilung von $X$ und $Y$ eine zweidimensionale Normalverteilung, dann ist Unabhängigkeit von $X$ und $Y$ äquivalent zur Unkorreliertheit.

c) Konstruieren Sie normalverteilte Zufallsvariablen $X$ und $Y$, die unkorrelliert, aber nicht unabhängig sind.