Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

8. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Montag 4.12 um 12 Uhr.

---

1. (Autoregressiver Prozess) Seien $\sigma, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| < 1$. Wir betrachten den durch

$$X_n \;:=\; \alpha X_{n-1} + \sigma Z_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

definierten AR(1)-Prozess, wobei X_0 und Z_n $(n \in \mathbb{N})$ unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit $Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ sind. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Falls $X_{n-1} \sim \mathcal{N}(m, v)$, so gilt $X_n \sim \mathcal{N}(\alpha m, \alpha^2 v + \sigma^2)$.

b) *Stationäre Verteilung:* Die Verteilung $\mu := \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2})$ ist ein *Gleichgewicht*, d.h.

$$X_0 \sim \mu \quad \Longrightarrow \quad X_n \sim \mu \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

c) *Abfall der Korrelationen:* Falls $X_0 \sim \mu$, so gilt

$$\mathrm{Cov}[X_n, X_{n-k}] \;=\; \alpha^k \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} \qquad \text{für alle } 0 \leq k \leq n.$$

d) *Konvergenz ins Gleichgewicht:* Berechnen Sie für den Prozess mit deterministischem Startwert $X_0 = x \in \mathbb{R}$ die Verteilung von X_n, und zeigen Sie, dass sich diese für $n \to \infty$ der Gleichgewichtsgewichtsverteilung μ annähert.

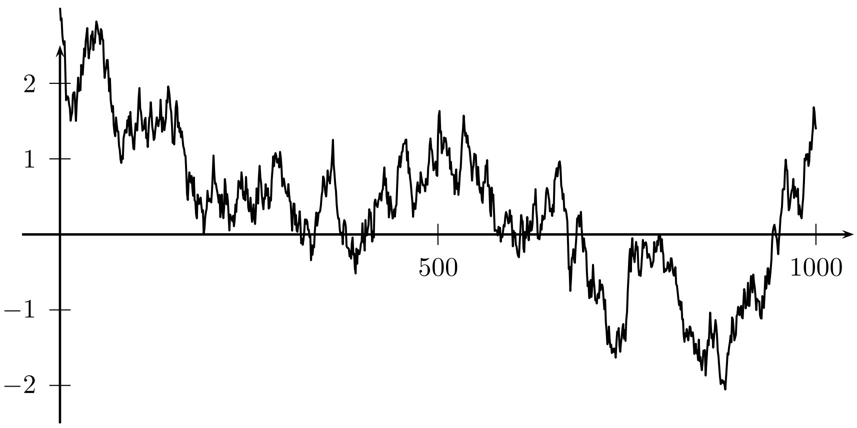

Abbildung 1: Trajektorie eines AR(1)-Prozesses mit Parametern $\alpha = 0.8$ und $\sigma^2 = 1.5$.

2. (Summen und Quotienten unabhängiger Zufallsvariablen) Seien X und Y unter $\mathbb{P}$ unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit absolutstetigen Verteilungen.

a) Berechnen Sie die Verteilung von $X+Y$, wenn X und Y auf $(0,1)$ gleichverteilt sind.

b) Zeigen Sie: Gilt $X > 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher, dann ist die Verteilung von $Z = Y/X$ absolutstetig mit Dichte

$$f_{Y/X}(z) \;=\; \int_0^\infty f_X(x)\, f_Y(zx)\, x\, dx\ .$$

Berechnen Sie die Verteilung von Z, wenn X und Y auf $(0,1)$ gleichverteilt sind.

3. (Bedingte Dichten)

a) Patrick und Lisa treffen sich freitags nach der Wahrscheinlichkeitstheorievorlesung in der Mensa. Sie kommen dort unabhängig und gleichverteilt zwischen 12 und 13 Uhr an. Beide sind bereit s Minuten zu warten, bevor sie wieder gehen. Finden Sie ein minimales s, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich die beiden treffen, mindestens 50 % beträgt.

b) Ein Stock wird an einer zufällig gewählten Stelle in zwei Teile gebrochen. Der längere Teil wird wieder zufällig in zwei Teile gebrochen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich aus den drei Teilen ein Dreieck bilden lässt?

4. (Dichtetransformation) Seien X_1 und X_2 unabhängige, zum Parameter λ exponentialverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen

$$Y_1 = X_1 + X_2 \quad \text{und} \quad Y_2 = X_1/(X_1 + X_2)$$

ebenfalls unabhängig sind, und bestimmen Sie die Verteilungen von Y_1 und Y_2.