Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

7. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Montag 27.11 um 12 Uhr.

---

1. (Berechnung von Erwartungswerten)

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ in den folgenden Fällen:

(i) X ist gleichverteilt auf $[0, 1]$.

(ii) Die Verteilung von X ist absolutstetig mit Dichte $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $X = e^Y$ für eine $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable Y.

b) Die *momentenerzeugende Funktion* einer reellen Zufallsvariable X ist definiert durch

$$M(t) \;=\; \mathbb{E}[\exp(tX)] \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die momentenerzeugende Funktion in den folgenden Fällen:

(i) X ist binomialverteilt zu den Parametern (n, p),

(ii) X ist exponentialverteilt zum Parameter λ,

(iii) X ist $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ verteilt.

Wie können die Momente $\mathbb{E}[X^n]$ aus der Funktion $M(t)$ berechnet werden?

2. (Bivariate Normalverteilung) Sei $\rho \in (-1, 1)$.

a) Zeigen Sie, dass

$$f(x, y) \;=\; \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte, die Varianzen, und die Kovarianz $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ von Zufallsvariablen X, Y mit gemeinsamer Verteilung μ.

3. (Acceptance-Rejection Verfahren) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien μ und ν Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einem messbaren Raum $(S, \mathcal{B})$. Das Maß μ sei absolutstetig bzgl. ν mit beschränkter relativer Dichte

$$\rho(x) \;=\; \frac{d\mu}{d\nu}(x) \;\leq\; C, \qquad C \in [1, \infty).$$

a) Sei $X : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable mit Verteilung ν und $U : \Omega \to (0,1)$ eine hiervon unabhängige, auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\mu[B] \;=\; \mathbb{P}\left[X \in B \,\middle|\, U \leq \frac{\rho(X)}{C}\right] \qquad \forall\, B \in \mathcal{B},$$

d.h. μ ist die bedingte Verteilung von X gegeben $U \leq \rho(X)/C$.

b) Seien nun $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to S$ und $U_1, U_2, \ldots : \Omega \to (0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung ν bzw. $\mathrm{Unif}_{(0,1)}$. Zeigen Sie: Dann ist

$$T \;:=\; \min\left\{n \in \mathbb{N} \,:\, U_n \leq \frac{\rho(X_n)}{C}\right\}$$

$\mathbb{P}$-f.s. endlich, und die (für $\mathbb{P}$-f.a. ω eindeutig definierte) Zufallsvariable

$$Y(\omega) \;:=\; X_{T(\omega)}(\omega)$$

hat Verteilung μ.

c) Sei $g : [0,1]^d \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion. Geben Sie einen Algorithmus an, der, ausgehend von unabhängigen Zufallszahlen aus $(0,1)$, eine Stichprobe von der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(0,1)^d$ mit Dichte $f(x) \propto g(x)$ erzeugt. Wovon hängt die Effizienz dieses Simulationsverfahrens ab?

4. (Gaußsche partielle Integrationsformel) Sei X eine zentrierte normalverteilte Zufallsvariable mit Varianz $\sigma^2 > 0$.

a) Sei $g \in C^1(\mathbb{R})$. Beweisen Sie unter geeigneten Wachstumsbedingungen an $g(x)$ für $|x| \to \infty$ die partielle Integrationsformel

$$\mathbb{E}[Xg(X)] \;=\; \mathrm{Var}[X]\mathbb{E}[g'(X)]\,.$$

b) Berechnen Sie mithilfe von a) die Momente $\mathbb{E}[X^n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.