Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

6. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie”

Abgabe bis Montag 20.11 um 12 Uhr.

---

1. (Dichten) Das n-dimensionale Lebesgue-Integral einer beliebigen Borel-messbaren nicht-negativen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann als Hintereinanderausführung von eindimensionalen Integralen nach den Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ berechnet werden:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \quad = \quad \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \cdots dx_1 .$$

Hierbei können die eindimensionalen Integrationen in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden. Zeigen Sie:

a) Ist $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ messbar mit $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1$, dann wird durch

$$\mu[B] \;=\; \int 1_B(x) f(x)\, dx$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ definiert. Die Funktion f heißt *Dichte von* μ.

b) Sind $X_1, \dots, X_n$ unter $\mathbb{P}$ unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit absolutstetigen Verteilungen mit Dichten $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$, dann hat die gemeinsame Verteilung von $X_1, \dots, X_n$ die Dichte

$$f(x_1, \dots, x_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)\,.$$

c) Umgekehrt gilt: Hat die gemeinsame Verteilung von $X_1, \dots, X_n$ eine Dichte der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\,, \qquad g_i : \mathbb{R} \to [0, \infty) \text{ messbar},$$

dann sind die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und die Verteilungen sind absolutstetig mit Dichten $f_{X_i} = g_i \,\big/ \int_{\mathbb{R}} g_i\, dx$, $1 \le i \le n$.

2. (Asymptotische Ereignisse) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, nichtnegativen rellwertigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass sie folgenden Ereignisse asymptotisch sind:

$$\{X_n > 2n \text{ unendlich oft}\},\ \{\liminf X_n < 17\},\ \{\inf X_n > 5\},$$
$$\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < 1\},\ \{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\},\ \{\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\}.$$

b) Geben Sie Beispiele von asymptotischen Zufallsvariablen an (mit Beweis).

3. (Perkolation) Sei $p \in [0,1]$. Wir betrachten unabhängige Zufallsvariablen X_i, $i \in \mathbb{Z}^d$, mit $\mathbb{P}[X_i = 1] = p$ und $\mathbb{P}[X_i = 0] = 1 - p$. Der Gitterpunkt $i \in \mathbb{Z}^d$ heißt *durchlässig*, falls $X_i = 1$ gilt. Sei A das Ereignis, dass eine unendliche Zusammenhangskomponente aus durchlässigen Gitterpunkten existiert. A_0 sei das Ereignis, dass der Nullpunkt in einer unendlichen Zusammenhangskomponente von durchlässigen Punkten enthalten ist. Zeigen Sie:

a) Im Fall $d = 1$, $p < 1$, gilt $\mathbb{P}[A] = 0$.

b) Für alle $d \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$ gilt: $\qquad \mathbb{P}[A] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}[A_0] > 0.$

Abbildung 1: Perkolation in Dimension $d = 2$ mit $p = 0.7$ und $p = 0.5$

4. (Zufällige Zeitpunkte und Poisson-Prozess I)

a) Zeigen Sie: Für unabhängige und auf einem Intervall (a,b) gleichverteilte Zufallsvariablen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ gilt $\mathbb{P}[U_1 < \cdots < U_n] = 1/n!$. Folgern Sie für $t \geq 0$, dass

$$\int_0^t \cdots \int_0^t \mathbf{1}_{\sum_{i=1}^n t_i \leq t}\, dt_n \cdots dt_1 \;=\; \int_0^t \cdots \int_0^t \mathbf{1}_{s_1 < \cdots < s_n}\, ds_n \cdots ds_1 \;=\; \frac{t^n}{n!}\,.$$

b) Sei $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ mit unabhängigen Zufallsvariablen $T_i \sim \mathrm{Exp}(1)$ $(i \in \mathbb{N})$. Wir betrachten den stochastischen Prozess $N_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{S_n \leq t}$, $t \in [0,\infty)$. Zeigen Sie:

(i) Für alle $t \geq 0$ gilt $N_t \sim \mathrm{Poisson}(t)$.

(ii) Für $0 \leq s \leq t$ ist $N_t - N_s$ unabhängig von N_s mit Verteilung $\mathrm{Poisson}(t-s)$.