Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

5. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Montag 13.11 um 12 Uhr.

---

1. (Unabhängigkeit und Verteilungsfunktionen) Seien X und Y unabhängige reellwertige Zufallsvariablen. Wir definieren $U = \min(X, Y)$ und $V = \max(X, Y)$. Zeigen Sie:

a) Die Verteilungsfunktionen von U und V sind gegeben durch:

$$F_U(u) \;=\; 1 - \big(1 - F_X(u)\big)\big(1 - F_Y(u)\big), \quad F_V(v) \;=\; F_X(v)F_Y(v)\;.$$

b) Sind X und Y beide exponentialverteilt zum Parameter 1, so ist U exponentialverteilt zum Parameter 2. Welche Dichte hat die Verteilung von V in diesem Fall? Skizzieren Sie die Dichten und interpretieren Sie die Ergebnisse anschaulich.

2. (Deterministische Zufallsvariablen)

a) Zeigen Sie, dass eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann unabhängig von sich selbst ist, wenn eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\mathbb{P}\left[X = c\right] \;=\; 1\;.$$

b) Sei X ein fast sicherer Grenzwert einer beliebigen Folge unabhängiger Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass X unabhängig von sich selbst, also fast sicher konstant ist.

3. (Rekorde) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit *stetiger* Verteilungsfunktion. Wir betrachten die Ereignisse

$$E_n \;:=\; \{X_n > X_m \;\forall\, m < n\} \;=\; \{\text{„ein Rekord wird zur Zeit } n \text{ erreicht"}\}\;.$$

a) Zeigen Sie $\mathbb{P}\left[X_n = X_m\right] = 0$ für alle $n \neq m$.

b) Folgern Sie, dass $\mathbb{P}\left[E_n\right] = 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass die Ereignisse $E_1, E_2, \ldots$ unabhängig sind.

Hinweis: Sollten Sie Schwierigkeiten haben, die erste Aussage zu beweisen, dann können Sie zusätzliche Annahmen an die Verteilungsfunktion machen, z.B. gleichmäßige Stetigkeit oder absolute Stetigkeit.

4. (Asymptotische Unabhängigkeit) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda, \mu \geq 0$ mit $\lambda + \mu \leq n$. Jeder von n Punkten werde mit Wahrscheinlichkeit λ/n grün und mit Wahrscheinlichkeit μ/n rot gefärbt, unabhängig von den anderen Punkten. Sei G die Anzahl der grün gefärbten, und R die Anzahl der rot gefärbten Punkte.

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von G und R und zeigen Sie, dass diese Zufallsvariablen nicht unabhängig sind.

b) Zeigen Sie, dass G und R im Grenzwert $n \to \infty$ asymptotisch unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λ und μ sind, d.h. es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[G = g, R = r] \; = \; \ldots$$

5. (Extrema von exponentialverteilten Zufallsvariablen) Seien $T_1, T_2, \ldots$ unabhängige, Exp(1)-verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Zeigen Sie

$$\mathbb{P}[T_n \geq \log n + c \log \log n \text{ unendlich oft}] \; = \; \begin{cases} 0 & \text{falls } c > 1, \\ 1 & \text{falls } c \leq 1. \end{cases}$$

b) Folgern Sie, dass $\mathbb{P}$-fast sicher gilt

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{T_n - \log n}{\log \log n} \; = \; 1 \, .$$