Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

4. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Montag 6.11 um 12 Uhr.

---

1. (Satz von de Moivre-Laplace)

a) Formulieren Sie die Aussage des Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace, und skizzieren Sie den Beweis. Die Beweisskizze sollte alle wesentlichen Approximationsschritte enthalten - Sie brauchen die einzelnen Schritte aber nicht vollständig auszuführen.

b) Ein Hotel hat 200 Betten. Wie viele Reservierungen darf der Hotelmanager akzeptieren, wenn erfahrungsgemäß eine Reservierung mit 20 % Wahrscheinlichkeit annulliert wird, und die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens $2,5\%$ sein soll?

2. (Normalapproximation der Poisson-Verteilung) Sei N eine zum Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilte Zufallsvariable. Beweisen Sie mithilfe der Stirlingschen Formel, dass

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{P}\left[a_\lambda \le N \le b_\lambda\right] \;=\; \Phi(b) - \Phi(a)$$

für alle $a < b$, wobei $a_\lambda = \lambda + a\sqrt{\lambda}$, $b_\lambda = \lambda + b\sqrt{\lambda}$ und Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

3. (Poisson-Approximation) Die *totale Variationsdistanz* zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ ist definiert als

$$d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \sup_{A\in\mathcal{A}} |\mathbb{P}[A] - \mathbb{Q}[A]| \ .$$

Seien A_i $(i = 1, \ldots, n)$ unabhängige Ereignisse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Wahrscheinlichkeiten $p_i = \mathbb{P}[A_i]$, und sei μ die Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ von der Anzahl derjenigen Ereignisse A_i, die eintreten. Zeigen Sie

$$d_{\mathrm{TV}}\left(\mu\,,\ \mathrm{Poisson}\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)\right) \le \sum_{i=1}^n p_i^2 \ .$$

4. (Wartezeiten) Eine Folge von Ereignissen trete zu zufälligen Zeitpunkten ein.

a) Wir nehmen an, dass die Anzahl der Ereignisse, die sich bis zur Zeit $t > 0$ ereignen, durch eine Poisson(λt)-verteilte Zufallsvariable modelliert wird, wobei $\lambda > 0$ ein fester Parameter ist. (Wofür und weshalb ist das eine sinnvolle Modellierungsannahme ?) Sei T_k der Zeitpunkt, zu dem das k-te Ereignis eintritt. Zeigen Sie, dass die Verteilung von T_k absolutstetig ist mit Dichte

$$f_k(t) \;=\; \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\, t^{k-1} e^{-\lambda t}\, \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)\ .$$

b) Analog können wir die Verteilung von Wartezeiten für Ereignisse bestimmen, die zu diskreten Zeitpunkten eintreten. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ trete unabhängig voneinander ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ ein. Erneut sei T_k der Zeitpunkt des Eintretens des k-ten Ereignisses. Zeigen Sie, dass T_k eine diskrete Zufallsvariable mit Massenfunktion

$$p_k(k+n) \;=\; \binom{k+n-1}{n} p^k (1-p)^n\ , \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ist.

c) Was ist der Zusammenhang zwischen den in a) und b) betrachteten Modellen ?

5. (Ausfallraten) Sei T eine positive absolutstetige Zufalssvariable mit stetiger Dichtefunktion f. Wir definieren die Ausfallrate r durch

$$r(t) \;=\; \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}\left[T \le t+h \,|\, T > t\right]\ , \quad t \ge 0\ .$$

a) Zeigen Sie

$$r(t) \;=\; H'(t) \;=\; f(t)/(1-F(t))\,,$$

wobei F die Verteilungsfunktion von T und $H(t) = -\log(1-F(t))$ ist.

b) Berechnen Sie die Ausfallrate in dem Fall, dass T eine *Weibull-Verteilung* hat, d.h.

$$\mathbb{P}[T > t] \;=\; \exp(-\alpha t^{\beta})$$

mit $\alpha, \beta > 0$. Was ergibt sich, falls T exponentialverteilt ist?

c) Mit welcher Transformation kann man eine Weibull-verteilte Zufallsvariable in eine exponentialverteilte Zufallsvariable überführen?