Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

3. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Montag 30.10 um 12 Uhr.

---

1. (Verteilungsfunktionen I) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Für $u \in (0, 1)$ sei

$$G(u) \;:=\; \inf\{c \in \mathbb{R} : F(c) \geq u\} \;=\; \sup\{c \in \mathbb{R} : F(c) < u\}$$

die *(linksstetige) verallgemeinerte Inverse* von F.

a) Zeigen Sie, dass F monoton wachsend und rechtsstetig ist mit

$$\lim_{c \to -\infty} F(c) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{c \to \infty} F(c) \;=\; 1\,.$$

b) Wie sehen die Graphen von F und G aus, falls die Verteilung von X durch

$$\mu_X \;=\; \frac{2}{3}\mathrm{Exp}(1) + \frac{1}{3}\delta_1$$

gegeben ist?

c) Zeigen Sie allgemein, dass G eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$\big((0, 1),\, \mathcal{B}((0, 1)),\, \mathrm{Unif}_{(0,1)}\big)$$

ist, die dieselbe Verteilung wie X unter $\mathbb{P}$ hat.

d) Wie kann man dies nutzen um eine Zufallsstichprobe x von der Verteilung μ_X zu erzeugen? Wie erzeugt man eine Stichprobe von der Exponentialverteilung Exp(1)?

2. (Verteilungsfunktionen II)

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Verteilungsfunktion

$$F(c) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } c < -1, \\ 1 - p & \text{für } -1 \leq c < 0, \\ 1 - p + \frac{1}{2}cp & \text{für } 0 \leq c \leq 2, \\ 1 & \text{für } c > 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X = -1]$, $\mathbb{P}[X = 0]$ und $\mathbb{P}[X \geq 1]$.

b) Sei nun F die Verteilungsfunktion einer beliebigen reellwertigen Zufallsvariable X. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen der folgenden Zufallsvariablen in Abhängigkeit von F:

$$X^+ \;=\; \max(X,0), \qquad X^- \;=\; -\min(X,0), \qquad |X|\,.$$

3. (Normalverteilung)

a) Sei Z eine Zufallsvariable mit Verteilung $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ und seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $X := aZ + b$ die Verteilung $\mathcal{N}(am+b, a^2\sigma^2)$ hat. Welche Verteilung hat X im Fall $a = 0$?

b) Die Verteilung von $Y := e^Z$ mit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ heißt *log-Normal-Verteilung.* Zeigen Sie, dass diese Verteilung absolutstetig ist und berechnen Sie ihre Dichte.

c) Beweisen Sie für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ die Abschätzung

$$\mathbb{P}[Z \geq x] \;\leq\; \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

4. (Bertrandsches Paradoxon) In einem Kreis mit Radius 1 wird rein zufällig eine Sehne (Verbindungsstrecke zwischen zwei Randpunkten) gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie länger als eine Seite des dem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks (also länger als $\sqrt{3}$)? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit mit den folgenden naheliegenden Modellierungsansätzen:

a) Der Mittelpunkt M der Sehne ist gleichverteilt auf der Kreisscheibe

$$D \;=\; \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\},.$$

b) Der Winkel Θ zwischen den beiden Endpunkten ist gleichverteilt auf $[0,\pi)$.
(Dies ist der Fall, wenn die beiden Endpunkte der Sehne unabhängig und auf dem Rand von D gleichverteilt sind.)

c) Der Abstand R des Sehnenmittelpunkts vom Ursprung ist gleichverteilt auf $(0,1)$.

Erhalten Sie mit allen Ansätzen dasselbe Ergebnis ? Warum oder warum nicht ?