Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

2. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben 1 bis 3 sowie mindestens eine der Aufgaben 4 und 5. Abgabe bis Montag 23.10 um 12 Uhr.

---

1. (σ-Algebren)

a) Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Zeige, dass $\sigma(\mathcal{J})$ eine σ-Algebra ist.

b) Folgere, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ alle abgeschlossenen und halboffenen Intervalle enthält.

c) Zeige $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\,(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\,\right)$.

d) Wie sieht ein möglichst einfaches Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ aus?

2. (Irrfahrt) Zwei Folgen $a_n, b_n \in \mathbb{R}_+$ $(n \in \mathbb{N})$ heißen *asymptotisch äquivalent* $(a_n \sim b_n)$, falls $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$ gilt. Nach der *Stirlingschen Formel* ist $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

a) Wir betrachten eine symmetrische Irrfahrt $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ mit unabhängigen Inkrementen $X_i \sim \mathrm{Unif}(\{-1, 1\})$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[Z_{2n} = 0] \;\sim\; \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,.$$

Kann man daraus schließen, dass die Irrfahrt immer wieder zum Ursprung zurückkehrt?

b) Betrachten Sie nun eine d-dimensionale Irrfahrt der Form $Z_n = (Z_n^{(1)}, \ldots, Z_n^{(d)})$ mit unabhängigen eindimensionalen symmetrischen Irrfahrten $(Z_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}_0}$, $i = 1, \ldots, d$. Zeigen Sie, dass für $d \geq 3$,

$$\mathbb{P}[Z_n = 0 \text{ für unendlich viele } n] \;=\; 0\,.$$

3. (Affe tippt Shakespeare (immer mal wieder)) Wir betrachten das kanonische Modell für unendlich viele unabhängige 0-1-Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$.

a) Geben Sie das Modell an, und zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\big[\, \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega \,|\, \omega_i = 1 \text{ unendlich oft}\} \,\big] \;=\; 1\,.$$

b) Allgemeiner sei $s = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ eine beliebige endliche Sequenz von Nullen und Einsen (also ein beliebiger endlicher Binärtext). Zeigen Sie, dass s mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft in der Folge $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ vorkommt.

4. (Eine nicht messbare Teilmenge von S^1) Sei $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Äquivalenzklassen auf S^1 bzgl. der Relation

$$z \;\sim\; w \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \;=\; e^{i\alpha} w \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{Q}\,.$$

a) Folgern Sie aus dem Auswahlaxiom die Existenz von disjunkten Mengen A_q, $q \in \mathbb{Q}$, die alle auseinander durch Rotation um den Ursprung hervorgehen, so dass

$$S^1 \;=\; \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q\,.$$

b) Zeigen Sie, dass auf $\mathcal{B}(S^1)$ eine rotationsinvariante Wahrscheinlichkeitsverteilung existiert.

c) Folgern Sie, dass die Mengen A_q nicht Borelsch sind.

Bemerkung: Das Banach-Tarski-Paradoxon besagt, dass eine Teilmenge F der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ existiert, so dass sich S^2 für jedes $3 \leq k \leq \infty$ als disjunkte Vereinigung von k Mengen schreiben lässt, die alle durch Rotation von F um den Nullpunkt entstehen!

5. (Stichproben und elementare Verteilungen)

a) Eine Lieferung enthält 90 funktionsfähige und 10 defekte Notebooks. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe von 10 Notebooks kein defektes enthält?

b) Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn stattdessen zehnmal unabhängig eine Einzelstichprobe entnommen wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zweien dieser Einzelstichproben derselbe Laptop geprüft wird?

c) Eine große Anzahl n verschiedener Briefe wird zufällig vermischt und auf n voradressierte Briefumschläge verteilt. Wie groß ist ungefähr die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest einer der Briefe den richtigen Empfänger erreicht?