Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

13. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Keine Abgabe

---

1. (Zentraler Grenzwertsatz; alte Klausuraufgabe)

a) Formulieren Sie den Zentralen Grenzwertsatz für Summen von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert m und Varianz σ^2 (ohne Beweis).

b) Folgern Sie für $x \geq 0$:

$$\sum_{k:|k-n|\leq \frac{1}{2}x\sqrt{n}} \binom{n}{k} \;\sim\; 2^n \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2}\, du \qquad \text{für } n \to \infty.$$

c) Seien $U_1, U_2, \ldots$ unabhängige, auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $X_1 := -\log U_1$ (mit Beweis) ? Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_1.

d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit

$$P\left[(U_1 \cdot U_2 \cdot \cdots \cdot U_n)^{n^{-1/2}}\, e^{n^{1/2}} \in [a,b] \right]$$

für $n \to \infty$ konvergiert, und geben Sie einen Ausdruck für den Grenzwert an.

2. (Gesetz der großen Zahlen; alte Klausuraufgabe)

a) Was versteht man unter $\mathbb{P}$-*stochastischer* und $\mathbb{P}$-*fast-sicherer* Konvergenz einer Folge (Y_n) von reellwertigen Zufallsvariablen (Definition) ? Geben Sie ein Beipiel einer Folge, die stochastisch, aber nicht fast sicher konvergiert.

b) Seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}[X_i = 1] = p$ und $\mathbb{P}[X_i = 0] = 1 - p$, $p \in [0,1]$. Zeigen Sie: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow p$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Geben Sie alle im Beweis verwendeten Aussagen vollständig inklusive aller Voraussetzungen an.

c) Bei einem Roulettespiel gewinnt ein Spieler in jeder Runde mit Wahrscheinlichkeit 18/37 einen Euro, und verliert mit Wahrscheinlichkeit 19/37 einen Euro. Sei Z_n das Kapital des Spielers nach n Runden bei Anfangskapital a. Interpretieren Sie das Ereignis

$$A \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{Z_k \leq 0\}$$

anschaulich, und zeigen Sie $\mathbb{P}[A] = 1$.