Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

12. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Montag 22.1. um 12 Uhr.

---

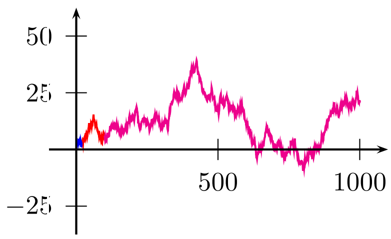
1. (Grenzwertsatz für Poisson-Verteilungen)

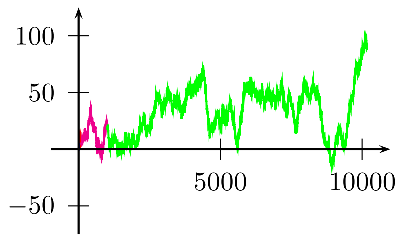
a) Bestimmen Sie (z.B. mithilfe von charakteristischen Funktionen) die Verteilung der Summe von n unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$.

b) Zeigen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes, dass

$$e^{-n}\left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdot + \frac{n^n}{n!}\right) \to \frac{1}{2} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

2. (Brownsche Molekularbewegung)





Ein Teilchen erfahre durch zufällige Stöße von anderen Teilchen pro Zeiteinheit eine zufällige Geschwindigkeitsumkehr, d.h. für seine Ortskoordinate (in einer vorgegebenen Richtung) zur Zeit t gelte $X_t = \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} V_i$ mit unabhängigen Geschwindigkeiten V_i, wobei $\mathbb{P}[V_i = \pm v] = \frac{1}{2}$ für ein $v > 0$. Geht man zu makroskopischen Skalen über, so wird das Teilchen zur Zeit t beschrieben durch die Zufallsvariable

$$B_t^{(\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon} X_{\frac{t}{\varepsilon}} ,$$

wobei $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie den Verteilungslimes B_t von $B_t^{(\varepsilon)}$ für $\varepsilon \searrow 0$ sowie dessen Dichte ρ_t. Zeigen Sie, dass diese Dichten die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \rho_t(x)}{\partial t} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \rho_t(x)}{\partial x^2}$$

mit einer geeigneten Diffusionskonstanten $D > 0$ erfüllen.

3. (Fehlerfortpflanzung bei transformierten Beobachtungen)

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten reellwertigen Zufallsvariablen mit endlicher Varianz $v > 0$ und Erwartungswert m. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(m) \neq 0$ und f'' beschränkt. Zeigen Sie: Für $n \to \infty$ gilt

$$\frac{\sqrt{n/v}}{f'(m)} \left(f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) - f(m) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1).$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Entwicklung von f im Punkt m und schätzen Sie das Restglied mit der Chebychev-Ungleichung ab.)

4. (Charakteristische Funktionen III) Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Ist die charakteristische Funktion ϕ einer Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ reellwertig, so haben X und $-X$ dieselbe Verteilung.

b) Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z gilt

$$\mathbb{E}\left[Z^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

c) Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit charakteristischer Funktion $\exp(-|t|^\alpha)$, so besitzt $n^{-1/\alpha} \sum_{i=1}^{n} X_i$ dieselbe Verteilung wie X_1.