Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

10. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Montag 8.1 um 12 Uhr.

Wir wünschen Ihnen fröhliche Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2024!

1. (Bernsteinpolynome) Diese Aufgabe liefert einen konstruktiven Beweis des Weierstrass'schen Approximationssatzes. Für eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist das zugehörige *Bernstein-Polynom* n-ten Grades definiert durch

$$f_n(p) \;=\; \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \text{für } p \in [0,1].$$

a) Stellen Sie die Bernstein-Polynome mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ in folgender Form dar

$$f_n(p) \;=\; \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right].$$

b) Folgern Sie, dass die Funktionenfolge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert.

2. (Starkes vs. schwaches Gesetz der großen Zahlen) Es sei $S_n = \sum_{i=2}^{n} X_i$, wobei $(X_i)_{i\geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X_i = i] = \frac{1}{i\log i} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X_i = 0] = 1 - \frac{1}{i\log i}$$

ist. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{E}[S_n/n] \to 0$ für $n \to \infty$.

b) Es gilt ein schwaches Gesetz der großen Zahlen, d.h. $S_n/n \to 0$ $\mathbb{P}$-stochastisch.

c) Ein starkes Gesetz der großen Zahlen gilt nicht.

3. (Normale Zahlen) Eine Zahl $u \in [0,1)$ heisst *normal*, falls folgendes gilt: Für alle $q \geq 2$ und $k \geq 1$ kommt in der q-adischen Dastellung

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i q^{-i}$$

jede Ziffernfolge $a = (a_1, \dots, a_k) \in \{0, \dots, q-1\}^k$ mit relativer Häufigkeit q^{-k} vor, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{1 \leq i \leq n \ : \ (u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k-1}) = a\right\}\right| = q^{-k} .$$

Zeigen Sie, dass bezüglich der Gleichverteilung auf $[0,1)$ fast jede Zahl normal ist.

4. (Konvergenz von Dirac-Maßen) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$. Wann genau konvergiert die Folge $\mu_n = \delta_{x_n}$
a) schwach, b) vage, c) in der Variationsdistanz, bzw. d) in der Kantorovich-Distanz?

5. (Ratenfunktionen für große Abweichungen) Seien $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. mit den unten angegebenen Verteilungen. Berechnen Sie jeweils die momentenerzeugenden Funktionen $M(t)$ der X_i, und skizzieren Sie die Graphen von $\Lambda(t) = \log M(t)$ und von der Ratenfunktion I im Satz von Chernoff. Zeigen Sie, dass I die angegebene Form hat, und erklären Sie den Verlauf von I anschaulich.

a) Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p \in (0,1)$,

$$I(a) = a\log\frac{a}{p} + (1-a)\log\frac{1-a}{1-p} \quad \text{für } a \in [0,1], \qquad I(a) = \infty \quad \text{für } a \notin [0,1].$$

b) Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$,

$$I(a) = \lambda a - 1 - \log(\lambda a) \quad \text{für } a > 0, \qquad I(a) = \infty \quad \text{für } a \leq 0.$$

6. (Charakteristische Funktionen)

a) Die *beidseitige Exponentialverteilung* ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $\mathbb{R}$ mit Dichte $f(x) = e^{-|x|}/2$. Zeigen Sie: Die charakteristische Funktion von μ ist

$$\varphi(t) = (1+t^2)^{-1} .$$

Hinweis: Sie können z.B. mit partieller Integration $\varphi(t) = 1 - t^2\varphi(t)$ zeigen.

b) Folgern Sie, dass $\varphi(t) = e^{-|t|}$ die charakteristische Funktion der *Cauchy-Verteilung* mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ist.

c) Zeigen Sie: Sind $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Cauchy-verteilte Zufallsvariablen, dann sind die empirischen Mittelwerte $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$, auch Cauchy-verteilt. Warum ist dies kein Widerspruch zum Gesetz der großen Zahlen?