Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

1. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Montag 16.10., 12 Uhr

---

1. (Unabhängigkeit und Unkorreliertheit) Seien X und Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\{-1, 1\}$.

a) Es gelte

$$\mathbb{P}[X = 1, Y = 1] = a, \quad \mathbb{P}[X = 1, Y = -1] = b,$$
$$\mathbb{P}[X = -1, Y = 1] = c, \quad \mathbb{P}[X = -1, Y = -1] = d.$$

Wann sind X und Y unkorreliert beziehungsweise unabhängig ? Geben Sie jeweils notwendige und hinreichende Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c, d der Massenfunktion der gemeinsamen Verteilung an.

b) Seien nun X und Y unabhängig und gleichverteilt. Zeigen Sie, dass die drei Zufallsvariablen $X, Y, X \cdot Y$ paarweise unabhängig sind. Sind sie auch unabhängig?

2. (σ–Additivität und monotone Stetigkeit) Sei $\mathcal{A}$ eine σ–Algebra.

a) Zeigen Sie, dass eine additive Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ genau dann σ–additiv ist, wenn gilt

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] \;=\; \mathbb{P}[\bigcup A_n] \,.$$

b) Gilt $\mathbb{P}[\Omega] = 1$, dann ist die σ–Additivität von $\mathbb{P}$ auch äquivalent zur $\emptyset$*–Stetigkeit* :

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \text{ mit } \bigcap A_n = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] \;=\; 0 \,.$$

3. (Unendliche Kombinationen von Ereignissen) Sei $A_1, A_2, \dots$ eine Folge von unabhängigen Ereignissen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}[A_n] < 1$ und $\mathbb{P}[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n] = 1$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right] \;=\; 1 \,.$$

4. (DNA-Test) Am Tatort eines Verbrechens wurden DNA-Spuren gefunden, die ein besonderes Merkmal aufweisen. In der Stadt wohnen 10^7 Menschen, von denen jeder das Merkmal unabhängig von den anderen mit der Wahrscheinlichkeit 10^{-7} trägt. Welche Verteilung beschreibt die Anzahl der Personen, die das Merkmal tragen, und wie kann man sie durch eine einfachere Verteilung näherungsweise beschreiben?

a) Angenommen die Polizei hat bereits einen Verdächtigen mit dem Merkmal gefunden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens eine weitere Person mit dem Merkmal gibt?

b) Wie unwahrscheinlich sollte das Merkmal sein, damit der Täter mit einer akzeptablen Wahrscheinlichkeit p eindeutig identifiziert werden kann?

Allgemeine Informationen. Für jede Aufgabe gibt es maximal 4 Punkte, wobei sich die Punktezahl sowohl aus Bearbeitungsgrad als auch Richtigkeit der Lösung zusammensetzt :

- 4 Punkte : überwiegend korrekte Lösung aller Teilaufgaben,
- 3 Punkte : Lösungsansätze zu allen Teilaufgaben; teilweise korrekt,
- entsprechend reduzierte Punktezahl falls nur Teile sinnvoll bearbeitet sind.

Die Abgabe kann in Zweier- oder Dreier-Gruppen stattfinden. Zulassungskriterien zur Prüfung:

- bei einer 2er Gruppe: 55 % der zu erreichenden Punkte;
- bei einer 3er Gruppe: 65 % der zu erreichenden Punkte;
- Präsentation der Lösungen im Tutorium.