Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

0. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungsgruppen der ersten Vorlesungswoche bearbeitet und besprochen.

---

1. (Fast sichere Ereignisse) Es sei A_r ($r \in \mathbb{N}$) eine Folge von Ereignissen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Es gelte $\mathbb{P}[A_r] = 1$ für alle r. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{r=1}^{\infty} A_r\right] = 1.$$

2. (Kombinationen von Ereignissen I) Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}[A_r] = p \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}[A_r \cap A_s] = q \quad \text{für alle } 1 \leq r, s \leq n \text{ mit } r \neq s.$$

Angenommen es tritt mindestens ein Ereignis sicher ein, aber nie mehr als zwei Ereignisse gleichzeitig. Zeigen Sie, dass dann $p \geq 1/n$ und $q \leq 2/n$ gelten muss.

3. (Kombinationen von Ereignissen II) Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}[A_r] = p, \quad \mathbb{P}[A_r \cap A_s] = q \quad \text{für } r \neq s, \quad \mathbb{P}[A_r \cap A_s \cap A_t] = x \quad \text{für } r < s < t.$$

Angenommen es tritt mindestens ein Ereignis sicher ein, aber nie mehr als drei Ereignisse gleichzeitig. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Ereignisse eintreten, sei $1/2$. Zeigen Sie, dass dann $p \geq 3/(2n)$, und $q \leq 4/n$ gelten muss.

4. (Murphy's law) Es wird wiederholt eine faire Münze geworfen. Zeigen Sie, dass mit Wahrscheinlichkeit eins irgendwann "Zahl" fällt. Zeigen Sie weiter, dass eine beliebige endliche Folge von "Kopf" und "Zahl" mit Wahrscheinlichkeit eins irgendwann in der Münzwurffolge auftritt.