Vorstellung des Lehrangebots - Bereich F: Stochastik

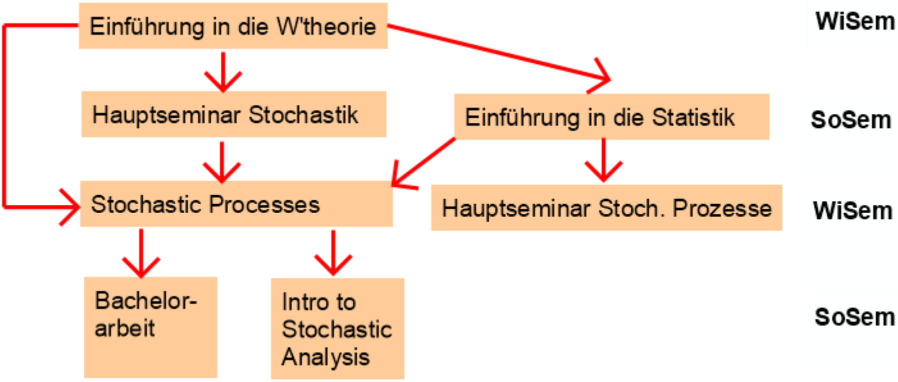
Andreas Eberle
Institut für angewandte Mathematik

Juni 2023

Stochastikvorlesungen im Bachelor

- Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (WiSem)
- Stochastische Prozesse (WiSem)
- Grundzüge der stochastischen Analysis (SoSem)

- Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (WiSem)
- Einführung in die Statistik (SoSem)

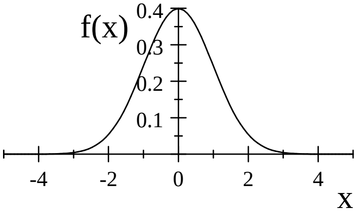


Einführung in die W'theorie
WiSem
Hauptseminar Stochastik
Einführung in die Statistik
SoSem
Stochastic Processes
Hauptseminar Stoch. Prozesse
WiSem
Bachelor-arbeit
Intro to Stochastic Analysis
SoSem

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

$X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige Zufallvariablen auf (Ω, A, P).

- diskret: z.B. $X_i = \pm 1$ mit W'keit $1/2$
- stetig: z.B. $P[a \leq X_i \leq b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$



- weder noch (z.B. diskreter und stetiger Anteil)

Erwartungswert als Lebesgue-Integral

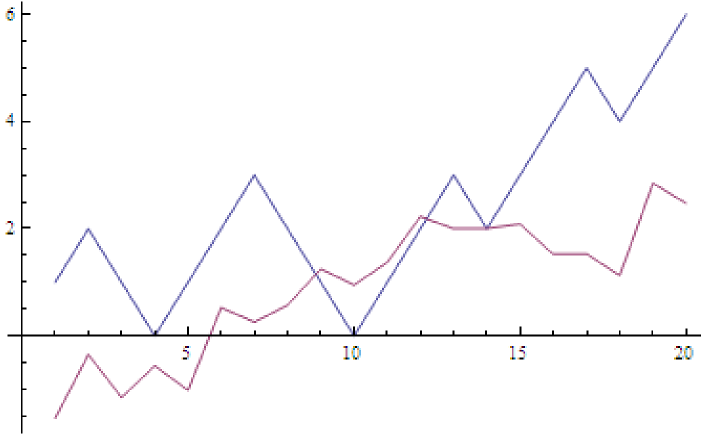
$X: \Omega \to S$ ZV

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_\Omega f(X(\omega))\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_S f(x)\,\mu(dx)$$

$\mu = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ Verteilung von X

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

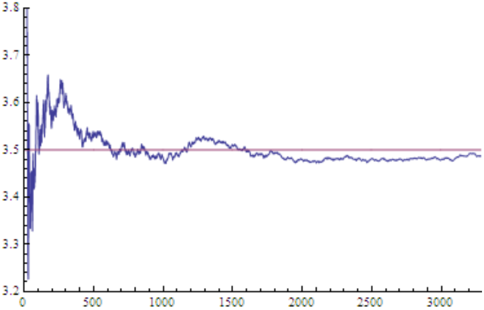
$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ Summe, Random Walk.



Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow m$$



- *schwach:* $P[|\frac{S_n}{n} - m| \geq \varepsilon] \longrightarrow 0$
- *stark:* $P[\underbrace{\frac{S_n}{n} \longrightarrow m}_{\text{asymptotisches Ereignis, hängt von } \infty \text{ vielen ZV ab}}] = 1$

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Zentraler Grenzwertsatz

Verteilung von $\sqrt{n} \cdot \left(\frac{S_n}{n} - m \right) \to N(0, \sigma^2)$ (Normalverteilung)

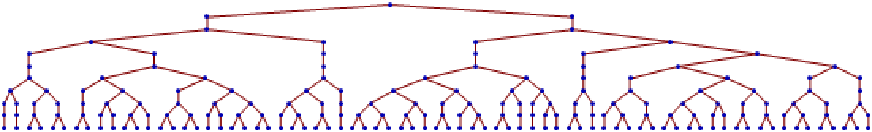
- **universell**:
  - Grenzwert ist unabhängig von der Verteilung der X_i **!!!!**

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right] \sim e^{-n \cdot I(\varepsilon)}$$

- Exponentieller Abfall der W'keiten
- Ratenfunktion $I(\varepsilon) \quad \longleftrightarrow \quad$ *Relative Entropie*

Verallgemeinerung:

- Bisher: $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ Summe von unabhängigen ZV
- Jetzt: $S_n \rightsquigarrow$ **Markovkette**

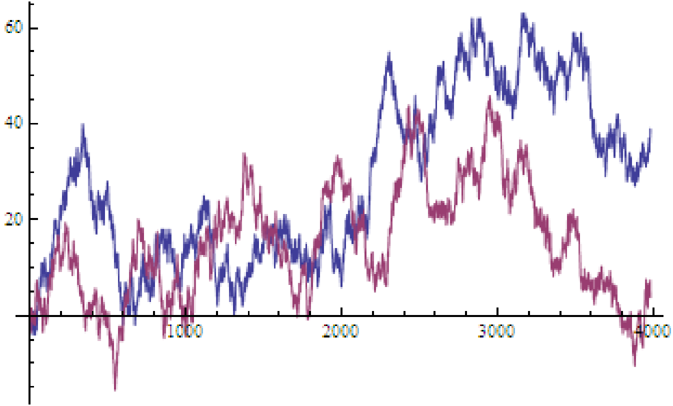


- Asymptotik ? Konvergenz ins Gleichgewicht ?
- Gesetz der großen Zahlen (Ergodensatz)
- Zentraler Grenzwertsatz

Stochastische Prozesse

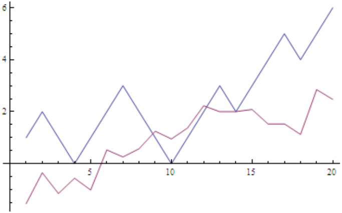
Brownsche Bewegung

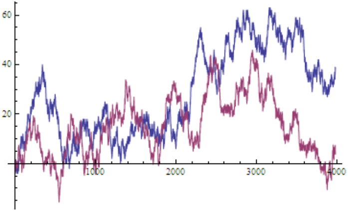
Trajektorie eines Random Walk S_n bei großer Schrittzahl:



Stochastische Prozesse

Rigoros: Reskaliere Zeit und Raum



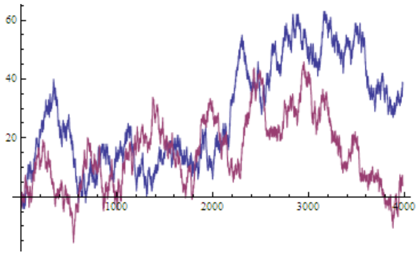


$$S_t^{(h)} = \sqrt{h} \cdot S_{t/h}$$

- $h \to 0: \quad S_t^{(h)} \to B_t$ für alle $t \geq 0$
- B_t **Brownsche Bewegung**
  - Einstein (1905)
  - Bachelier (1900)
  - Wiener (1920)

Stochastische Prozesse

Brownsche Bewegung



- Fundamentaler stochastischer Prozess in stetiger Zeit *(Diffusionsprozess)*
- Enge Verbindung zum Laplaceoperator:
  - d-dimensionaler Random Walk $\longleftrightarrow \quad \Delta_{\mathbb{Z}^d}$
  - d-dimensionale Brownsche Bewegung $\longleftrightarrow \quad \Delta_{\mathbb{R}^d}$
- Pfade sind stetig, aber nirgendwo differenzierbar
- Für festes t ist B_t eine normalverteilte Zufallsvariable

Stochastische Analysis

Konstruktion von anderen stochastischen Prozessen X_t über stochastische Differentialgleichungen:

$$\underbrace{dX_t = b(X_t)\,dt}_{\text{Gewöhnliche DGl}} + \underbrace{\sigma(X_t)\,dB_t}_{\text{Zufällige Störung}}$$

- Basis für zentrale mathematische Modelle in ...
  - Finanzmathematik (Black-Scholes, ...)
  - Mathematische Physik
  - Biologie, Chemie
- ... aber auch für tiefe theoretische Resultate:
  - Satz von Hörmander (Malliavin 1978)
  - stoch. Beweis des Atiyah-Singer-Indextheorems (Bismut 1984)
  - stoch. Löwner-Evolution (Werner, Fields-Medaille 2008)

Einführung in die Statistik

Stochastik $=$ W'theorie $\cup$ Statistik

- **W'theorie**: Mathematische Analyse von stochastischen Modellen
- **Statistik**: Rückschluss von Beobachtungsdaten auf das zugrundeliegende Modell
- *Beispiel:*
  - X $=$ Anzahl der Ja-Stimmen bei einer Meinungsumfrage
  - Modell: X ist binomialverteilt mit Parametern n und p
  - p ist unbekannt
    $\rightsquigarrow$ wir wissen nicht, welches Modell das richtige ist
  - Können wir den korrekten Wert für p aus den Beobachtungsdaten schätzen ?
  - Fehlerabschätzung ?
  - *Zentraler Grenzwertsatz*:
    Fehler ist asymptotisch normalverteilt

Modulbeschreibungen

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

- **Voraussetzung**: Grundvorlesungen
- **Inhalt**:Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen, stochastische Standardmodelle. Bedingte W'keiten, Unabhängigkeit, Borel-Cantelli-Lemma. Random walk, Zusammenhang mit Differenzengleichungen. Erwartungswert, Varianz und Kovarianz. Gesetze der großen Zahlen, Konvergenzbegriffe der Stochastik. Momentenerzeugende und charakteristische Funktionen, multivariate Normalverteilungen, zentraler Grenzwertsatz. Entropie. Markov-Ketten: Rekurrenz und Transienz, Gleichgewichte, Ergodizität.
- **Querverbindungen:** Analysis III (Maßtheorie, Integration)

Modulbeschreibungen

Stochastische Prozesse

- **Voraussetzung**: Einführung in die Wtheorie
- **Inhalt**:Bedingte Erwartungen, bedingte Dichten, stochastische Kerne. Zeitdiskrete Markovketten: Existenzsatz, Dirichletproblem, Rekurrenz und Transienz, Konvergenz ins Gleichgewicht, Ergodizität. Isingmodell. Reversible Markovketten und Markov Chain Monte Carlo Methoden. Poissonprozeß und zeitstetige Markovketten, Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen. Brownsche Bewegung: Motivation als Skalierungslimes von Irrfahrten (ohne Beweis), Randverteilungen, Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung, Existenzsatz von Kolmogorov (Beweis optional), Wiener-Levy-Konstruktion, Skalierungsinvarianz und Symmetrien, Pfadregularität.
- **Querverbindungen:** Diskrete Mathematik (Markovketten), Partielle Dgln (Brownsche Bewegung), Statistische Physik, Mathematische Biologie

Modulbeschreibungen

Grundzüge der stochastischen Analysis

- **Voraussetzung**: Einführung in die Wtheorie, Stochastische Prozesse
- **Inhalt**:Zeitdiskrete Martingale: Stoppsatz, Ruinproblem, diskrete stochastische Integrale, Konvergenzsätze, Anwendungen auf Markovketten. Zeitstetige Martingale: Regularität, Stoppsatz, Abschätzungen. Itokalkül: Brownsche Bewegung, quadratische Variation, stochastisches Integral bzgl. einer Brownschen Bewegung, Itoformel (ein- und mehrdimensional), Martingale und Levy-Charakterisierung der Brownschen Bewegung, stochastische Darstellungen von Lösungen des Dirichletproblems und der Wärmeleitungsgleichung, Austritts- und Passierzeiten, Integration bzgl. Brownscher Semimartingale, Feynman-Kac-Formel, Girsanovtransformation.
- **Querverbindungen:** Partielle Dgln und Funktionalanalysis, Finanzmarktmodelle (Ökonomie)

Modulbeschreibungen

Einführung in die Statistik

- **Voraussetzung**: Einführung in die Wtheorie
- **Inhalt**: **Statistik :** Parametrische, nichtparametrische, und Bayessche Modelle, Modellwahl, Robustheit. Mittlerer quadratischer Fehler von Schätzern, Informationsungleichung, Zusammenhang von Fisher-Information und relativer Entropie. Niveau und Macht von Hypothesentests, Neyman-Pearson-Lemma. Konfidenzintervalle und Tests in Gaußschen Produktmodellen. Konsistenz von Maximum-Likelihood-Schätzern, asymptotische Macht von Likelihoodquotiententests. Asymptotische Normalität von ML-Schätzern (Beweis optional). Konvergenz von empirischen Verteilungen, Normalapproximation von Multinomialverteilungen, Anpassungstests und ihre Asymptotik, Tests auf Unabhängigkeit.

  Optional: neuronale Netzwerke, maschinelles Lernen, Statistik in hohen Dimensionen

- **Querverbindungen:** Ökonometrie, Data Science