Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Hinweise zur Klausur

- Die Klausur findet statt am Donnerstag, 22.2.2024, von 9.00-11.00 Uhr im CP1 (Friedrich-Hirzebruch-Allee 5).
- Hilfsmittel, Unterlagen, Smartphones etc. sind nicht zugelassen. Papier wird gestellt.
- Beim ersten Prüfungstermin (22.2.) dürfen Sie eine Aufgabe streichen.
- Die Aufgaben enthalten typischerweise:
  - Fragen zu Definitionen, Sätzen und Beweisen aus der Vorlesung. Zur Orientierung finden Sie auf diesem Blatt eine Liste von typischen Fragen (ohne Anspruch auf Vollständigkeit).
  - Aufgabenteile zum Verständnis und der Anwendung des Vorlesungsinhalts. Hier bieten die Übungsaufgaben und Beispiele der Vorlesung eine gute Orientierung.
  - Aufgabenteile mit konkreten Berechnungen.

Die Klausureinsicht findet am 23.2. von 14 bis 15 Uhr im GHS statt.

a) Zentrale Sätze

1. Formulieren und beweisen Sie den **zentralen Grenzwertsatz**. Welche der Voraussetzungen sind wesentlich? Welche können abgeschwächt werden? Folgern Sie den Satz von de Moivre/Laplace aus dem ZGS.
2. Formulieren und beweisen Sie das **starke Gesetz der großen Zahlen** (L2 Version). Welche weiteren Aussagen gelten, wenn zusätzlich Unabhängigkeit vorausgesetzt wird? Wie geht die Unabhängigkeit im Beweis dieser Aussagen ein?
3. Formulieren und beweisen Sie den **Satz von Chernoff**. Wie ist der Zusammenhang mit dem Gesetz der großen Zahlen?
4. Was ist ein **asymptotisches Ereignis**? Beispiele und Gegenbeispiele? Formulieren und beweisen Sie das **0-1 Gesetz von Kolmogorov.**
5. Erläutern Sie die **Poisson-Approximation** und die **Normalapproximation** von Binomialverteilungen. In welchem Bereich sind diese Approximationen anwendbar?
6. Formulieren und beweisen Sie das erste und zweite **Borel-Cantelli-Lemma**, und folgern Sie das starke Gesetz der großen Zahlen für unabhängige 0-1-Experimente.
7. Formulieren Sie die **starke Markov-Eigenschaft**. Wie kann man diese verwenden, um Rekurrenz und Transienz von Markov-Ketten zu untersuchen? Anwendung auf Random Walks?
8. Skizzieren Sie den Beweis eines **Gesetzes der großen Zahlen für Markov-Ketten** und formulieren Sie eine Verallgemeinerung.

b) Erwartungswert und Konvergenzbegriffe

1. Welche **Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen** kennen Sie (Definitionen), und in welchem Zusammenhang stehen diese? Welche **Ungleichungen**/Argumente werden zum Beweis jeweils verwendet?
2. Was versteht man unter **Konvergenz in Verteilung**, was unter **schwacher Konvergenz** von Wahrscheinlichkeitsverteilungen? Beispiele?
3. Wie ist der **Erwartungswert** einer reellwertigen Zufallsvariable definiert? Formulieren und beweisen Sie den **Transformationssatz**. Wie berechnet man Erwartungswerte für Verteilungen mit Dichten? Beispiele?
4. Wie sind **Varianz**, **Kovarianz** und **Korrelation** definiert? Was besagt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung** für die Kovarianz bzw. Korrelation?
5. Definieren Sie, was eine **charakteristische Funktion** ist. Welche Eigenschaften bzw. Rechenregeln gelten? Definieren Sie, was eine **momentenerzeugende Funktion** ist. Wie und unter welchen Voraussetzungen können aus der momentenerzeugenden bzw. charakteristischen Funktion die Momente einer Zufallsvariable berechnet werden?
6. Nennen Sie (ohne Beweis) den **Satz von der monotonen Konvergenz**, und leiten Sie daraus das **Lemma von Fatou** und den **Satz von Lebesgue** her. Geben Sie ein Beispiel, wo das Vertauschen von Grenzwert und Erwartungswert nicht zulässig ist.

c) Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1. Formulieren Sie den **Eindeutigkeitssatz** für W'maße (ohne Beweis). Erläutern Sie Anwendungen, z.B. auf W'maße auf R, endliche und unendliche Produktmodelle,....
2. Was versteht man unter einer **Zufallsvariable** und unter ihrer **Verteilung**? Nennen Sie **spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen**. Erläutern Sie, wie diese auftreten, und welche Eigenschaften Zufallsvariablen mit diesen Verteilungen haben.
3. Was versteht man unter der **Verteilungsfunktion** einer reellen Zufallsvariable? Beispiele? Wie berechnet man den Erwartungswert aus der Verteilungsfunktion? Wie kann man eine Stichprobe von einer reellen ZV mit gegebener Verteilungsfunktion simulieren?
4. Was ist eine **absolutstetige Zufallsvariable**? Beispiele? Wie berechnet man die **Dichte** aus der Verteilungsfunktion und umgekehrt? Was ist eine **relative Dichte** zweier W'maße?
5. Wie ist die **Unabhängigkeit** für allgemeine Zufallsvariablen definiert? Zeigen Sie, dass Funktionen von unabhängigen Zufallsvariablen wieder unabhängig sind. Wie berechnet man die Verteilung von Summen unabhängiger reeller Zufallsvariablen?
6. Was versteht man unter der **gemeinsamen Verteilung** von mehreren Zufallsvariablen? Wie erkennt man Unabhängigkeit an der gemeinsamen Verteilung bzw. an deren Dichte?
7. Wie sind ein- und mehrdimensionale **Normalverteilungen** definiert? Warum sind diese Verteilungen für die Wahrscheinlichkeitstheorie fundamental?
8. Wie sind **Exponentialverteilungen** definiert, und wie ist der Zusammenhang mit Poisson-Verteilungen?