Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

Klausur ,,Wahrscheinlichkeitstheorie"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 4 Aufgaben. Bitte bearbeiten Sie *alle* Aufgaben.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studierendenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten.
- Abgabe bis 11.15 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	**Summe**	**Note**
Punkte						

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$
\begin{array}{lll}
\Phi(0,0) = 0,500 & \Phi(1,0) = 0,841 & \Phi(2,0) = 0,977 \\
\Phi(0,1) = 0,539 & \Phi(1,1) = 0,864 & \Phi(2,1) = 0,982 \\
\Phi(0,2) = 0,579 & \Phi(1,2) = 0,884 & \Phi(2,2) = 0,986 \\
\Phi(0,3) = 0,617 & \Phi(1,3) = 0,903 & \Phi(2,3) = 0,989 \\
\Phi(0,4) = 0,655 & \Phi(1,4) = 0,919 & \Phi(2,4) = 0,991 \\
\Phi(0,5) = 0,691 & \Phi(1,5) = 0,933 & \Phi(2,5) = 0,993 \\
\Phi(0,6) = 0,725 & \Phi(1,6) = 0,945 & \Phi(2,6) = 0,995 \\
\Phi(0,7) = 0,758 & \Phi(1,7) = 0,955 & \Phi(2,7) = 0,996 \\
\Phi(0,8) = 0,788 & \Phi(1,8) = 0,964 & \Phi(2,8) = 0,997 \\
\Phi(0,9) = 0,815 & \Phi(1,9) = 0,971 & \Phi(2,9) = 0,998
\end{array}
$$

1. (Zufallsvariablen und ihre Verteilung; 30 Punkte)

a) Definieren Sie die folgenden Begriffe:

(i) Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

(ii) reellwertige Zufallsvariable,

(iii) Verteilungsfunktion,

(iv) Dichtefunktion einer absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

(v) gemeinsame Verteilung zweier reellwertiger Zufallsvariablen X und Y.

[10]

Im folgenden seien B, X, S und T unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungen

$$B \sim \text{Bernoulli}(1/4), \quad X \sim \mathcal{N}(0,1), \quad S, T \sim \text{Exp}(1).$$

b) Sind die Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen absolutstetig? Geben Sie im absolutstetigen Fall die Dichten, und im nicht absolutstetigen Fall die Verteilungsfunktionen an *(ohne Begründung)*.

(i) B,

(ii) $3X + 1$,

(iii) X^2,

(iv) $X + B$,

(v) $S + T$.

[12]

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte der folgenden Zufallsvariablen:

(i) B,

(ii) $B \cdot (3X + 1)$,

(iii) X^4.

[8]

Lösung:

a) (i) Die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ ist die von allen offenen Intervallen erzeugte σ-Algebra, d.h.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \;=\; \sigma\left(\{(s,t) : -\infty \leq s \leq t \leq \infty\}\right) \,.$$

(ii) Eine reellwertige Zufallsvariable ist eine messbare Abbildung X von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, d.h.

$$X^{-1}(B) \;\in\; \mathcal{A} \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}.$$

(iii) Die Verteilungsfunktion einer reellwertigen Zufallsvariablen X ist die Funktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ gegeben durch

$$F_X(c) \;=\; \mathbb{P}(X \leq c) \,.$$

(iv) Eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ist die Dichtefunktion einer absolutstetigen Verteilung μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, falls

$$\mu[(-\infty, c)] \;=\; \int_{-\infty}^{c} f(x)dx \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}.$$

(v) Die gemeinsame Verteilung der reellwertigen Zufallsvariablen X, Y ist die Verteilung der Zufallsvariable (X, Y) auf $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B})$.

b) (i) nicht absolutstetig mit

$$F_B(c) \;=\; \frac{3}{4}\mathbf{1}_{c \geq 0} + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{c \geq 1} \;,$$

(ii) absolutstetig mit

$$f_{3X+1}(x) \;=\; f_{\mathcal{N}(1,9)}(x) \;=\; \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{18}} \;,$$

(iii) absolutstetig mit

$$f_{X^2}(x) \;=\; \frac{f_{\mathcal{N}(0,1)}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\mathbf{1}_{x>0} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}\mathbf{1}_{x>0} \;,$$

(iv) absolutstetig mit

$$f_{X+B}(x) \;=\; \frac{3}{4} f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) + \frac{1}{4} f_{\mathcal{N}(0,1)}(x-1) \;=\; \frac{3}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \;,$$

(v) absolutstetig mit

$$f_{S+T}(x) \;=\; x e^{-x}\mathbf{1}_{x>0} \;.$$

c) (i)

$$\mathbb{E}B \;=\; \mathbb{P}(B = 1) \;=\; \frac{1}{4} \;,$$

(ii) Aufgrund der Unabhängigkeit gilt

$$\mathbb{E}[B(3X+1)] \;=\; \mathbb{E}B\mathbb{E}(3X+1) \;=\; \frac{1}{4} \;,$$

(iii) Mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X^4 \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot x e^{-x^2/2} dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 \cdot e^{-x^2/2} dx \;=\; 3\mathrm{Var}(X) \\ &=\; 3 \;. \end{aligned}$$

2. (Grenzwertsätze; 22 Punkte)

a) Wie ist die schwache Konvergenz einer Folge μ_n ($n \in \mathbb{N}$) von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definiert? *[2]*

b) Formulieren Sie eine Version des zentralen Grenzwertsatzes *(ohne Beweis)*. *[4]*

c) Seien $A_1, A_2, \ldots, A_{49}$ unabhängige Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit p. Berechnen Sie näherungsweise

(i) für $p = 1/2$ die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 32 der Ereignisse eintreten,

(ii) für $p = 1/49$ die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei der Ereignisse eintreten. *[16]*

Lösung:

a) Die Folge μ_n konvergiert schwach gegen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, falls für alle stetigen, beschränkten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu \, .$$

b) Seien $X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Varianz σ^2. Dann konvergieren die Verteilungen von

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}X_i)$$

schwach gegen $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

c) (i) Die Zufallsvariablen $\mathbf{1}_{A_i}$ sind quadratintegrierbar, unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert p und Varianz $p(1-p)$. Mit dem zentralen Grenzwertsatz gilt nun:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{49} \mathbf{1}_{A_i} \geq 32\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{49} \mathbf{1}_{A_i} \geq 31,5\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{49} \mathbf{1}_{A_i} < 31,5\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \frac{1}{\sqrt{49}} \sum_{i=1}^{49} (\mathbf{1}_{A_i} - \mathbb{E}\mathbf{1}_{A_i}) < \frac{31,5 - 49p}{\sqrt{49p(1-p)}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{31,5 - 49p}{\sqrt{49p(1-p)}}\right) \approx 1 - \Phi(2,0) \approx 0,023 \, ,
\end{aligned}$$

(ii) Da die Ereignisse i.i.d. mit Wahrscheinlichkeit $1/49$ sind, ist $\sum_{i=1}^{49} \mathbf{1}_{A_i} \sim \mathrm{Bin}(49, 1/49)$. Nach der Poissonapproximation für seltene Ereignisse ist diese Zufallsvariable ungefähr Poisson(1) verteilt. Daher gilt

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{49} \mathbf{1}_{A_i} \leq 2\right) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{49} \mathbf{1}_{A_i} = k\right) \approx \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-1}}{k!} = \frac{2,5}{e} \, .$$

3. (Unabhängigkeit und Gesetz der großen Zahlen; 32 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen aus $\mathcal{A}$, und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$.

a) Definieren Sie Unabhängigkeit

(i) der Ereignisse A_n $(n \in \mathbb{N})$,

(ii) der Zufallsvariablen X_n $(n \in \mathbb{N})$.

[4 Pkt.]

b) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? (ohne Begründung)

(i) Sind die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ unabhängig, dann sind die Zufallsvariablen X_n $(n \in \mathbb{N})$ unabhängig.

(ii) Ist X_i unabhängig von X_j für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, dann sind die Zufallsvariablen X_n $(n \in \mathbb{N})$ unabhängig.

(iii) Sind die Ereignisse $\{X_n > c_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ für beliebige $c_n \in \mathbb{R}$ unabhängig, dann sind die Zufallsvariablen X_n $(n \in \mathbb{N})$ unabhängig.

(iv) Sind die Ereignisse $\{X_n < c_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ für beliebige $c_n \in \mathbb{Q}$ unabhängig, dann sind die Zufallsvariablen X_n $(n \in \mathbb{N})$ unabhängig.

(v) Sind die Zufallsvariablen X_n $(n \in \mathbb{N})$ unabhängig, dann sind auch $\sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} X_{2n+1}$ unabhängige Zufallsvariablen.

(vi) Sind die Zufallsvariablen X_n $(n \in \mathbb{N})$ unabhängig, dann sind auch $\sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}$ und $\limsup_{n\to\infty} X_n$ unabhängige Zufallsvariablen.

[4]

c) Formulieren und beweisen Sie das erste und das zweite Borel-Cantelli-Lemma. *[12]*

Ab jetzt sei

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

mit unabhängigen, zum Parameter 1 exponentialverteilten Zufallsvariablen X_i $(i \in \mathbb{N})$.

d) Zeigen Sie: Für $t \in (0, 1)$, $c \in (0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{n} \geq c\right] \leq \left(\frac{1}{1-t} e^{-tc}\right)^n .$$

[6]

e) Folgern Sie: Für $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt die Chernoff-Abschätzung

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{n} \geq 1 + \varepsilon\right] \leq \left((1+\varepsilon)e^{-\varepsilon}\right)^n .$$

[2]

f) Zeigen Sie

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq 1\right] = 1 .$$

[4]

Lösung:

a) (i) Die Ereignisse A_n heissen unabhängig, falls für alle endlichen $I \subset \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \;=\; \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\ .$$

(ii) Die Zufallsvariablen X_n heissen unabhängig, falls für alle endlichen $I \subset \mathbb{N}$ und alle $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i \in I$, gilt, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i \in B_i\}\right) \;=\; \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i \in B_i)\ .$$

b) (i) wahr

(ii) falsch

(iii) wahr

(iv) wahr

(v) wahr

(vi) wahr

c) **Erstes Borel-Cantelli-Lemma:** Falls $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m} A_n\right) \;=\; 0\ .$$

Beweis: Da $\bigcup_{n\geq m} A_n$ monoton fallend ist, gilt mit monotoner Stetigkeit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m} A_n\right) \;=\; \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq m} A_n\right)\ .$$

Weiter gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq m} A_n\right) \;\leq\; \sum_{n\geq m} \mathbb{P}\left(A_n\right) \;\to\; 0$$

mit $m \to \infty$ aufgrund der vorausgesetzten Reihenkonvergenz.

Zweites Borel-Cantelli-Lemma: Falls die Ereignisse A_n unabhängig sind und $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m} A_n\right) \;=\; 1\ .$$

Beweis: Da $\bigcap_{n\geq m} A_n^c$ monoton wachsend ist, gilt mit monotoner Stetigkeit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m} A_n\right) \;=\; 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m} A_n^c\right) \;=\; 1-\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq m} A_n^c\right)\ .$$

Weiter gilt mit der Unabhängigkeit der A_n^c, welche aus der Unabhängigkeit der A_n folgt,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq m} A_n^c\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=m}^N A_n^c\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=m}^N \mathbb{P}\left(A_n^c\right) .$$

Da $\mathbb{P}\left(A_n^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A_n\right) \leq e^{-\mathbb{P}(A_n)}$, gilt nun

$$\prod_{n=m}^N \mathbb{P}\left(A_n^c\right) \leq \prod_{n=m}^N e^{-\mathbb{P}(A_n^c)} = e^{-\sum_{n=m}^N \mathbb{P}(A_n^c)} \to 0$$

mit $N \to \infty$, da $\sum_{n=m}^N \mathbb{P}(A_n) \to \infty$.

d) Mit der exponentiellen Markov-Ungleichung gilt

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq c\right) = \mathbb{P}\left(tS_n \geq tcn\right) \leq e^{-tcn}\mathbb{E}e^{tS_n} = \left(\frac{1}{1-t}e^{-tc}\right)^n ,$$

wobei wir benutzen, dass für die unabhängigen $X_i \sim \text{Exp}(1)$ gilt, dass

$$\mathbb{E}e^{tS_n} = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{tX_i} = \left(\int_0^\infty e^{-(1-t)x}dx\right)^n = (1-t)^{-n} .$$

e) Für $t = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \in (0,1)$ ist $\frac{1}{1-t} = 1+\epsilon$, sodass mit d) gilt, dass

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 1+\epsilon\right) \leq \left((1+\epsilon)e^{-\epsilon}\right)^n .$$

f) Für alle $\epsilon > 0$ ist $(1+\epsilon)e^{-\epsilon} \in (0,1)$, sodass mit e)

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 1+\epsilon\right) \leq \sum_{n\geq 1} \left((1+\epsilon)e^{-\epsilon}\right)^n < \infty .$$

Nach dem ersten Borel-Cantelli-Lemma folgt

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \geq 1+\epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m} \left\{\frac{S_n}{n} \geq 1+\epsilon\right\}\right) = 0 .$$

Sei nun $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $\epsilon_k \to 0$. Mit monotoner Stetigkeit gilt dann

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq 1\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > 1\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1}\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \geq 1+\epsilon_k\right\}\right) \\ &= 1 - \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \geq 1+\epsilon_k\right) = 1 .\end{aligned}$$

4. (Markov-Ketten; 36 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\nu)$ eine zeitlich homogene Markov-Kette im kanonischen Modell mit abzählbarem Zustandsraum S, Startverteilung ν und irreduzibler Übergangsmatrix $p = (p(x,y))_{x,y\in S}$. Ferner sei μ eine invariante Wahrscheinlichkeitsverteilung von p.

a) Geben Sie Ω, X_n, $\mathcal{A}$, sowie

$$\mathbb{P}_\nu[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n]$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, \ldots, x_n \in S$ so explizit wie möglich an *(ohne Begründung)*. *[6]*

b) Definieren Sie Zufallsvariablen, die die folgenden Größen beschreiben:

(i) erste Besuchszeit $T_y \geq 0$ der Markov-Kette in einem Zustand $y \in S$,

(ii) Anzahl $B_y(n)$ der Besuche der Markov-Kette im Zustand $y \in S$ vor der Zeit n. *[4]*

c) Formulieren Sie ein Gesetz der großen Zahlen für die Markov-Kette *(ohne Beweis)*. *[4]*

d) Sei $S = \{0, 1\}$, $p(0,1) = 2/3$ und $p(1,0) = 1/3$. Berechnen Sie die asymptotische mittlere Aufenthaltszeit der Markov-Kette im Zustand 0, also den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_0(n)}{n}.$$

[6]

e) Geben Sie die Definition einer Stoppzeit an, und zeigen Sie, dass T_y für jedes $y \in S$ eine Stoppzeit ist. *[6]*

f) Was besagt die *starke Markov-Eigenschaft*? *[4]*

g) Erläutern Sie *kurz*, welche Rolle die starke Markov-Eigenschaft im Beweis des Gesetzes der großen Zahlen spielt *(nur die Idee skizzieren, keine Beweisdetails)*. *[6]*

Lösung:

a) Es ist

$$\Omega \;=\; S^\infty \;=\; \{\omega = (\omega_0, \omega_2, \ldots) : \omega_i \in S\}$$

der diskrete Pfadraum auf dem die Projektionen

$$X_n(\omega) \;=\; \omega_n$$

die Produkt-σ-Algebra

$$\mathcal{A} \;=\; \sigma(X_n : n \geq 0)$$

erzeugen. Weiter gilt

$$\mathbb{P}_\nu[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] \;=\; \nu(\{x_0\})p(x_0, x_1)\cdots p(x_{n-1}, x_n)\;.$$

b) In der Notation aus a) ist:

(i)

$$T_y \; = \; \min\{n \geq 0 : X_n = y\} \; .$$

(ii)

$$B_y(n) \; = \; \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_y(X_i) \; ,$$

c) Da die Markov-Kette nach Voraussetzung irreduzibel, und μ eine invariante Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, gilt für alle $f : S \to \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}_\nu$-fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) \; = \; \int f d\mu \; .$$

d) Für die Übergangsmatrix $p = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu \; = \; \mu p \; &= \; \begin{pmatrix} \mu(0) & \mu(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} (\mu(0)+\mu(1))/3 & 2(\mu(0)+\mu(1))/3 \end{pmatrix} \\ &= \; \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \; . \end{aligned}$$

Mit c) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_0(n)}{n} \; = \; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{1}_0(X_i) \; = \; \int \mathbf{1}_0 d\mu \; = \; \mu(0) \; = \; \frac{1}{3} \; .$$

e) Eine nicht-negative Zufallsvariable $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots\} \cup \{\infty\}$ heisst Stoppzeit, falls für alle $n \geq 0$ gilt, dass

$$\{T = n\} \; \in \; \mathcal{F}_n \; = \; \sigma(X_0, \ldots, X_n) \; .$$

T_y ist eine Stoppzeit, da für alle $n \geq 0$

$$\{T_y = n\} \; = \; \bigcap_{k=0}^{n-1} \{X_k \neq y\} \cap \{X_n = y\} \; \in \; \mathcal{F}_n \; .$$

f) Ist T eine Stoppzeit, dann gilt für alle messbaren $F : S^{\{0,1,\ldots\}} \to \mathbb{R}_+$ und alle

$$A \; \in \; \mathcal{F}_T \; = \; \{A' \in \mathcal{A} : A' \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ für alle } n \geq 0\} \; ,$$

dass

$$\mathbb{E}_\nu\big(F(X_T, X_{T+1}, \ldots); A \cap \{T < \infty\}\big) \; = \; \mathbb{E}_\nu\Big(\mathbb{E}_{X_T}\big(F(X_0, X_1, \ldots)\big); A \cap \{T < \infty\}\Big) \; .$$

g) Es reicht das GGZ für $\nu = \delta_y$ für alle $y \in S$ zu zeigen. Die starke Markov-Eigenschaft besagt, dass die Exkursionen aus y unabhängig voneinander sind. Daher kann die Summe im GGZ als Summer unabhängiger Teilsummen geschrieben werden, für die somit ein klassisches GGZ gilt.