Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 2023/24
Andreas Eberle, Stefan Oberdörster

Klausur „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 4 Aufgaben. Bitte bearbeiten Sie die ersten beiden Aufgaben, sowie **entweder Aufgabe 3 oder Aufgabe 4**, und streichen Sie die nicht bearbeitete Aufgabe. Bei der Korrektur werden nur 3 Aufgaben berücksichtigt.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studierendenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten.
- Abgabe bis 11.15 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	**Summe**	**Note**
Punkte						

Werte zur Standardnormalverteilung

$\Phi(0/10) = 0,500$	$\Phi(10/10) = 0,841$	$\Phi(20/10) = 0,977$
$\Phi(1/10) = 0,539$	$\Phi(11/10) = 0,864$	$\Phi(21/10) = 0,982$
$\Phi(2/10) = 0,579$	$\Phi(12/10) = 0,884$	$\Phi(22/10) = 0,986$
$\Phi(3/10) = 0,617$	$\Phi(13/10) = 0,903$	$\Phi(23/10) = 0,989$
$\Phi(4/10) = 0,655$	$\Phi(14/10) = 0,919$	$\Phi(24/10) = 0,991$
$\Phi(5/10) = 0,691$	$\Phi(15/10) = 0,933$	$\Phi(25/10) = 0,993$
$\Phi(6/10) = 0,725$	$\Phi(16/10) = 0,945$	$\Phi(26/10) = 0,995$
$\Phi(7/10) = 0,758$	$\Phi(17/10) = 0,955$	$\Phi(27/10) = 0,996$
$\Phi(8/10) = 0,788$	$\Phi(18/10) = 0,964$	$\Phi(28/10) = 0,997$
$\Phi(9/10) = 0,815$	$\Phi(19/10) = 0,971$	$\Phi(29/10) = 0,998$

1. (Zufallsvariablen und ihre Verteilung; 40 = 6 + 16 + 18 Punkte)

Bei Aufgabenteilen a) und b) brauchen Sie *keine Begründungen und Beweise* angeben!

a) Sei X eine Zufallsvariable vom Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ in den Massraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Wie sind die Verteilung und die Verteilungsfunktion von X definiert? Wann nennt man die Verteilung absolutstetig? Wie hängen die Verteilungsfunktion und die Dichte in diesem Fall zusammen?

b) Sei B eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit

$$\mathbb{P}[B = 1] = 2/3 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[B = 0] = 1/3 ,$$

und sei Z eine von B unabhängige, normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 0 und Varianz 100.

Sind die Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen absolutstetig? Skizzieren Sie die Graphen der Verteilungsfunktionen, sowie, im absolutstetigen Fall, die Graphen der Dichten so präzise wie möglich (mit Beschriftung der Koordinatenachsen):

(i) B ,

(ii) Z ,

(iii) $Y = B \cdot Z$,

(iv) $W = Z + 40\,B$.

c) Sei T eine mit Intensität 1 exponentialverteilte Zufallsvariable.

(i) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und eine Dichte der Verteilung von e^{-T}.

(ii) Berechnen Sie die Erwartungswerte von T und e^{-T}.

(iii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $Y = B \cdot Z$ aus b).

Lösung:

a) Verteilung:

$$\mu_X(B) \;=\; \mathbb{P}(X \in B) \;=\; \mathbb{P} \circ X^{-1}(B) \,, \quad B \in \mathcal{B}.$$

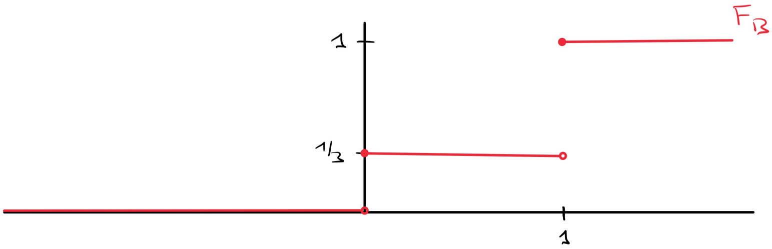
Verteilungsfunktion:

$$F_X(c) \;=\; \mu_X((-\infty, c]) \;=\; \mathbb{P}(X \leq c) \,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

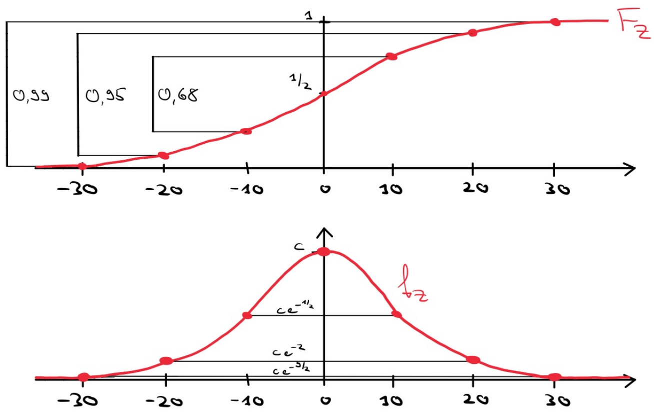
Die Verteilung ist absolutstetig, falls eine Dichte $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ existiert, so dass

$$F_X(c) \;=\; \int_{-\infty}^{c} f_X \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}.$$

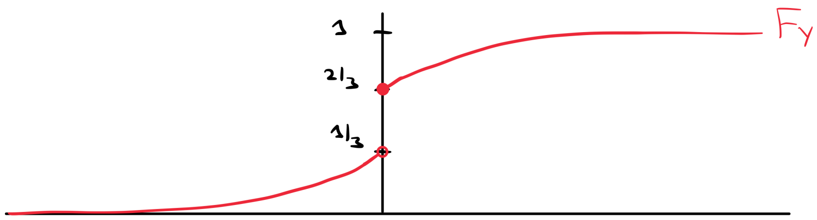
b) (i) nicht absolutstetig



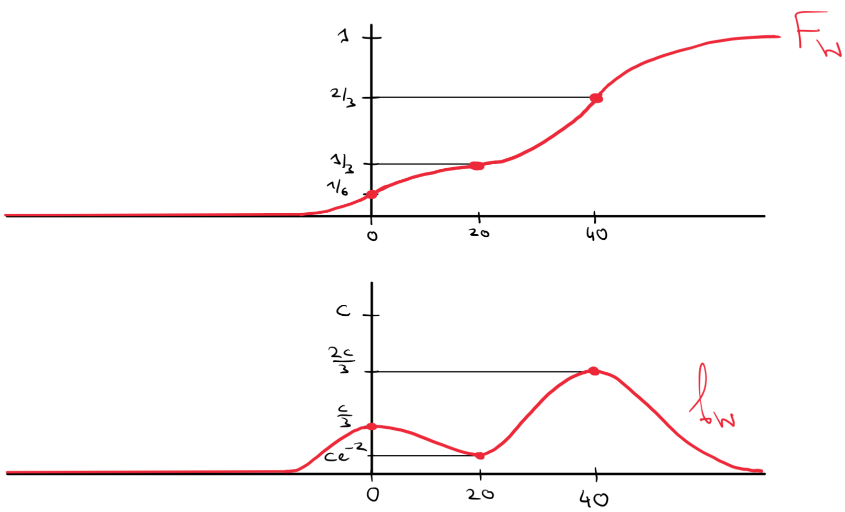
(ii) absolutstetig



(iii) nicht absolutstetig



(iv) absolutstetig



c) (i) Es gilt

$$F_{e^{-T}}(c) \;=\; \mathbb{P}(e^{-T} \leq c)\;, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Da $T > 0$ $\mathbb{P}$-f.s., gilt $0 < e^{-T} < 1$ $\mathbb{P}$-f.s.. Folglich ist $F_{e^{-T}}(c) = 0$ für $c \in (-\infty, 0]$ und $F_{e^{-T}}(c) = 1$ für $c \in [1, \infty)$. Für $0 < c < 1$ gilt

$$F_{e^{-T}}(c) \;=\; \mathbb{P}(T \geq -\log c) \;=\; \int_{-\log c}^{\infty} e^{-c} dc \;=\; c\;.$$

Also

$$F_{e^{-T}}(c) \;=\; \min(1, c)\mathbf{1}_{c>0}\;.$$

Da $F_{e^{-T}}$ differenzierbar ist, ist eine Dichte durch die Ableitung

$$f_{e^{-T}}(c) \;=\; F'_{e^{-T}}(c) \;=\; \mathbf{1}_{[0,1)}(c)$$

gegeben.

(ii) Mit partieller Integration gilt

$$\mathbb{E}T \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} c f_T(c) dc \;=\; \int_0^{\infty} c e^{-c} dc \;=\; -ce^{-c}|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-c} dc \;=\; 1$$

und

$$\mathbb{E}e^{-T} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} c f_{e^{-T}}(c) dc \;=\; \int_0^1 c dc \;=\; \frac{1}{2}\;.$$

(iii) Aufgrund der Unabhängigkeit von B und Z gilt

$$\mathbb{E}Y \;=\; \mathbb{E}(BZ) \;=\; \mathbb{E}B\mathbb{E}Z \;=\; 0\;,$$

da $\mathbb{E}Z = 0$. Damit und mit der Unabhängigkeit gilt weiter

$$\mathrm{Var}(Y) \;=\; \mathbb{E}Y^2 \;=\; \mathbb{E}(B^2Z^2) \;=\; \mathbb{E}B^2\mathbb{E}Z^2 \;=\; \frac{2}{3}\mathrm{Var}(Z) \;=\; \frac{200}{3}\;.$$

2. (Zentraler Grenzwertsatz; 44 = 3 + 13 + 16 + 12 Punkte)

a) Wie sind die folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definiert?

(i) Dirac-Maß im Punkt $a \in \mathbb{R}$,

(ii) Gleichverteilung auf der Menge $\{-1, 1\}$,

(iii) Standardnormalverteilung.

b) Wie sind die momentenerzeugende und die charakteristische Funktion einer reellwertigen Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert? Berechnen Sie diese Funktionen für Zufallsvariablen mit den Verteilungen aus Aufgabenteil a).

c) Seien X_n $(n \in \mathbb{N})$ unabhängige, identisch verteilte, reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X_n] = 0$. Formulieren und beweisen Sie einen zentralen Grenzwertsatz für die Summen

$$S_n \;=\; X_1 + \ldots + X_n\,.$$

Dabei können Sie auf grundlegende Aussagen aus der Vorlesung und den Grundvorlesungen verweisen, ohne diese separat zu beweisen.

d) Seien U_n $(n \in \mathbb{N})$ unabhängige, auf $(-1, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{30.000} U_i > 100\right]$$

näherungsweise.

Lösung:

a) Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt:

(i)

$$\delta_a(B) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in B, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

(ii)

$$\mathrm{Unif}_{\{-1,1\}} \;=\; \frac{\delta_{-1} + \delta_1}{2}\;,$$

(iii)

$$\mathcal{N}(0,1)(B) \;=\; \int_B \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx\;.$$

b) Für $t \in \mathbb{R}$ sind die momentenerzeugende und charakteristische Funktion gegeben durch

$$M(t) = \mathbb{E}e^{tX} \quad \text{und} \quad \phi(t) = \mathbb{E}e^{itX} .$$

Für die Verteilungen aus a) gilt:

(i)

$$M_{\delta_a}(t) = e^{ta} \quad \text{und} \quad \phi_{\delta_a}(t) = e^{ita} .$$

(ii)

$$M_{\mathrm{Unif}_{\{-1,1\}}}(t) = \frac{e^{-t}+e^{t}}{2} = \cosh(t) \quad \text{und} \quad \phi_{\mathrm{Unif}_{\{-1,1\}}}(t) = \frac{e^{-it}+e^{it}}{2} = \cos(t) .$$

(iii)

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{N}(0,1)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx)} dx = e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx \\ &= e^{t^2/2} \mathcal{N}(t,1)(\mathbb{R}) = e^{t^2/2} \end{aligned}$$

und

$$\phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = M_{\mathcal{N}(0,1)}(it) = e^{-t^2/2} .$$

c) Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass, falls zuzätzlich zu den in der Aufgabenstellung formulierten Annahmen $X_n \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Varianz $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$, dann konvergiert die Verteilung von $S_n/\sqrt{n}$ schwach gegen $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Beweis: Nach dem Konvergenzsatz von Lévy genügt es zu zeigen, dass

$$\phi_{S_n/\sqrt{n}}(t) \to \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Aus b) folgt

$$\phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t) = \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)} e^{it\sigma Z} = \phi_{\mathcal{N}(0,1)}(\sigma t) = e^{-\sigma^2 t^2/2} .$$

Da die X_n i.i.d. sind, gilt

$$\phi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \phi_{S_n}(t/\sqrt{n}) = \phi_{X_1}(t/\sqrt{n})^n .$$

Da X_1 quadratintegrierbar ist, gilt laut des Satzes zur Momentenerzeugung, dass ϕ_{X_1} zweimal stetig differenzierbar ist. Also

$$\phi_{X_1}(t) = 1 + it\mathbb{E}X_1 - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}X_1^2 + o(t^2) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2) ,$$

wobei $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{|o(\epsilon)|}{\epsilon} = 0$. Also

$$\phi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + o(t^2/n)\right)^n .$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\left|\phi_{S_n/\sqrt{n}}(t) - e^{-\sigma^2 t^2/2}\right| &= \left|\left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + o(t^2/n)\right)^n - \left(e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2n}}\right)^n\right| \\ &\le n\left|1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + o(t^2/n) - e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2n}}\right| \to 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, wobei wir benutzt haben, dass

$$|z^n - w^n| \le n|z - w|$$

für $|z|, |w| \le 1$ gilt, was mit der Dreiecksungleichung gezeigt werden kann.

d) Da

$$\mathbb{E}U_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx = 0$$

und

$$\mathrm{Var}(U_n) = \mathbb{E}U_n^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3} ,$$

gilt nach c) bzgl. schwacher Konvergenz

$$\frac{1}{\sqrt{30.000}} \sum_{i=1}^{30.000} \sqrt{3} U_i \to \mathcal{N}(0,1) .$$

Mit dem zentralen Grenzwertsatz gilt weiter

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{30.000} U_i > 100\right] &= 1 - \mathbb{P}\left[\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{30.000} U_i \le 1\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{30.000}}\sum_{i=1}^{30.000} \sqrt{3} U_i \le 1\right] \\ &\approx 1 - \Phi(1) \approx 0,841 = 0,159 .\end{aligned}$$

3. (Markov-Ketten; 36 = 6 + 4 + 4 + 10 + 6 + 6 Punkte)

Bearbeiten Sie entweder diese Aufgabe oder Aufgabe 4, und streichen Sie auf dem Deckblatt die nicht bearbeitete Aufgabe.

Für $x \in \mathbb{Z}$ sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_x)$ eine zeitlich homogene Markov-Kette im kanonischen Modell mit Zustandsraum $\mathbb{Z}$, Startverteilung δ_x und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(a,b) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } |a-b| = 1\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Geben Sie Ω, X_n, $\mathcal{A}$, sowie

$$\mathbb{P}_x[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n]$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ so explizit wie möglich an *(ohne Begründung)*.

b) Definieren Sie Zufallsvariablen, die die folgenden Größen beschreiben:

(i) Anzahl B_y der Besuche der Markov-Kette in einem Zustand $y \in \mathbb{Z}$ zu beliebigen Zeitpunkten $n \geq 0$,

(ii) k-te Rückkehrzeit $T^{(k)}$ der Markov-Kette in den Anfangszustand x.

c) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathbb{E}_x\left[B_y\right] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} p^n(x,y)\,.$$

d) Folgern Sie, dass die mittlere Anzahl der Besuche im Anfangszustand unendlich ist. *Hinweis: Die Stirling-Formel* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *kann vorausgesetzt werden.*

e) Begründen Sie *kurz*, dass ein $c \in (0,1)$ existiert mit

$$\mathbb{P}_x[B_x \geq n] \;=\; c^{n-1}\,.$$

Hier wird kein vollständiger Beweis erwartet, aber Sie sollten erwähnen, welche Aussagen verwendet werden.

f) Folgern Sie, dass die Markov-Kette rekurrent ist.

Lösung:

a) Es ist

$$\Omega \;=\; \mathbb{Z}^\infty \;=\; \{\omega = (\omega_0, \omega_2, \ldots) : \omega_i \in \mathbb{Z}\}$$

der diskrete Pfadraum auf dem die Projektionen

$$X_n(\omega) \;=\; \omega_n$$

die Produkt-σ-Algebra

$$\mathcal{A} \;=\; \sigma(X_n : n \geq 0)$$

erzeugen. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] \;&=\; \delta_x(\{x_0\})p(x_0,x_1)\cdots p(x_{n-1},x_n)\\ &=\; \begin{cases} 2^{-n} & \text{falls } x = x_0 \text{ und } |x_{i-1}-x_i| = 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

b) In der Notation aus a) ist:

(i)

$$B_y \;=\; \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_y(X_n)\ ,$$

(ii)

$$T^{(0)} \;=\; 0 \quad \text{und rekursiv} \quad T^{(k)} \;=\; T^{(k-1)} + T_x \circ \theta^{T^{(k-1)}}\ ,$$

wobei $\theta(\omega_0, \omega_1, \dots) = (\omega_1, \dots)$ und

$$T_x \;=\; \min\{n \geq 1 : X_n = x\}\ .$$

c) Mit monotoner Konvergenz gilt

$$\mathbb{E}_x B_y \;=\; \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_x(X_n = y) \;=\; \sum_{n\geq 0} p^n(x,y)\ .$$

d) Da wir nur in einer geraden Anzahl Schritten zum Startpunkt zurückkehren können gilt

$$p^{2n+1}(x,x) \;=\; 0\ .$$

Weiter gilt

$$p^{2n}(x,x) \;=\; \binom{2n}{n} 2^{-2n}\ ,$$

da wir für eine Rückkehr in $2n$ Schritten jeweils n Schritte in beide Richtungen machen müssen und alle Pfade Wahrscheinlichkeit 2^{-2n} haben. Mit der Stirling-Formel gilt nun

$$p^{2n}(x,x) \;=\; \frac{(2n)!}{(n!)^2} 2^{-2n} \;\sim\; \frac{\sqrt{4\pi n}(2n/e)^{2n}}{(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n)^2} 2^{-2n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\ ,$$

so dass mit c)

$$\mathbb{E}_x B_x \;=\; \sum_{n\geq 0} p^n(x,x) \;=\; \sum_{n\geq 0} p^{2n}(x,x) \;\sim\; \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \;=\; \infty\ .$$

e) Es gilt

$$\mathbb{P}_x[B_x \geq n] \;=\; \mathbb{P}_x[T^{(n-1)} < \infty] \;=\; \mathbb{P}_x[T_x < \infty]^{n-1}\ ,$$

da aufgrund der starken Markov-Eigenschaft die Exkursionen ausgehend von x unabhängig voneinander sind.

f) Laut d) und e) gilt

$$\infty \;=\; \mathbb{E}_x B_x \;=\; \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x[B_x \geq n] \;=\; \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_x[T_x < \infty]^n \,,$$

so dass

$$\mathbb{P}_x[T_x < \infty] \;=\; 1$$

gelten muss. Mit e) folgt, dass

$$\mathbb{P}_x[B_x \geq n] \;=\; 1$$

für alle $n \geq 0$, so dass

$$\mathbb{P}_x[B_x = \infty] \;=\; 1 \,.$$

Da dies für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt, sind alle Zustände rekurrent und damit auch die Markov-Kette.

4. (0-1-Gesetz; 36 = 2 + 5 + 8 + 6 + 15 Punkte)

Bearbeiten Sie entweder diese Aufgabe oder Aufgabe 3, und streichen Sie auf dem Deckblatt die nicht bearbeitete Aufgabe.

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen mit Werten in $(0,\infty)$, die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ definiert sind.

a) Wie ist ein asymptotisches Ereignis (tail event) definiert?

b) Welche der folgenden Ereignisse sind asymptotisch? (ohne Begründung)

(i) $\limsup_{n\to\infty} X_n \geq 5$,

(ii) $X_n > 5$ unendlich oft,

(iii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n > 5$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n \geq 5$,

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty$.

c) Formulieren und beweisen Sie das Kolmogorovsche 0-1-Gesetz.

d) Wir betrachten ab jetzt den stochastischen Prozess

$$Z_n \;=\; \prod_{i=1}^{n} X_i \qquad (n\in\mathbb{N})$$

mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to (0,\infty)$. Dieser beschreibt zum Beispiel ein zufälliges Wachstum. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit

$$p \;:=\; \mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} Z_n = 0\right]$$

ist entweder gleich 0 oder gleich 1.

e) Seien $a,b\in(0,\infty)$ mit $a\neq b$. Es gelte

$$\mathbb{P}[X_n = a] \;=\; \mathbb{P}[X_n = b] \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von a und b, ob $p=0$ oder $p=1$ gilt.

Lösung:

a) Ein $A\in\sigma(X_1,X_2,\dots)$ ist ein asymptotisches Ereignis, falls

$$A \;\in\; \sigma(X_n : n\in\mathbb{N}\setminus I)$$

für alle endlichen $I\subset\mathbb{N}$.

b) (i) Ist asymptotisch.
   (ii) Ist asymptotisch.
   (iii) Ist nicht asymptotisch.
   (iv) Ist nicht asymptotisch.
   (v) Ist asymptotisch.

c) Das Kolmogorovsche 0-1-Gesetz besagt, dass, falls die X_n unabhängig sind, gilt für alle asymptotischen Ereignisse

$$\mathbb{P}[A] \ \in \ \{0,1\} \ .$$

Beweis: Sei τ die Menge aller asymptotischen Ereignisse. Da die X_n unabhängig sind, sind die $\sigma(X_n)$ unabhängige Mengensysteme. Nach dem Gruppierungssatz sind $\sigma(X_1,\dots,X_n)$ und $\sigma(X_{n+1},\dots)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ unabhängig. Da $\tau\subseteq\sigma(X_{n+1},\dots)$, sind τ und $\sigma(X_1,\dots,X_n)$ unabhängig für alle $n\in\mathbb{N}$. Damit sind τ und $\sigma(X_1,\dots)$ unabhängig, da letztere von der Vereinigung der $\sigma(X_1,\dots,X_n)$ erzeugt wird. Wegen $\tau\subseteq\sigma(X_1,\dots)$ folgt, dass alle asymptotischen Ereignisse $A\in\tau$ unabhängig von sich selbst sind, also $\mathbb{P}[A]\in\{0,1\}$.

d) Nach dem Kolmogorovsche 0-1-Gesetz reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} Z_n \ = \ 0$$

ein asymptotisches Ereignis ist. Sei $I\subset\mathbb{N}$ endlich. Da $\prod_{i\in I} X_i \neq 0$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} Z_n \ = \ 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{i\in I^c\cap\{1,\dots,n\}} X_i \ = \ 0 \ .$$

Folglich ist

$$\left\{\lim_{n\to\infty} Z_n = 0\right\} \ \in \ \sigma(X_i : i\in\mathbb{N}\setminus I) \ .$$

e) Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen konvergiert

$$\log Z_n^{1/n} \ = \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log X_i \ \to \ \mathbb{E}\log X_1 \ = \ \frac{\log a + \log b}{2} \ = \ \log\sqrt{ab}$$

$\mathbb{P}$-fast sicher. Für $ab\neq 1$ gilt folglich

$$p \ = \ 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} Z_n \ = \ 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher} \quad \Leftrightarrow \quad ab \ < \ 1$$

und $p=0$ sonst. Für $ab=1$ ist $\log Z_n$ ein symmetrischer Random-Walk, so dass $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\limsup_{n\to\infty} \log Z_n \ = \ \infty \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} \log Z_n \ = \ -\infty \ .$$

Also ist $p=0$, da der Grenzwert fast sicher nicht existiert.