Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 2017/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

Klausur „Einführung in die W'theorie"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 3 Aufgaben, die Sie alle bearbeiten sollten.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Abgabe bis spätestens 11.20 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3				**Summe**	**Note**
Punkte								

1. (Zufallsvariablen und ihre Verteilung [32 Punkte])

a) Sind die Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen absolutstetig ? Berechnen Sie die Verteilungsfunktionen und im absolutstetigen Fall die Dichten.

(i) $U \sim \mathrm{Unif}(-1, 1)$,

(ii) $X = |U|$,

(iii) $Y = U^2$,

(iv) $Z = U^+$.

[15]

b) Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Wie ist die gemeinsame Verteilung von X und Y definiert ? Wann nennt man X und Y unabhängig ? Wie erkennt man Unabhängigkeit an der Dichte der gemeinsamen Verteilung, wenn diese absolutstetig ist ? *[6]*

c) Seien nun W und Z unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $X = W + Z$ und $Y = W - Z$ wieder unabhängig sind mit Verteilung $X, Y \sim N(0, 2)$. *[7]*

d) Bestimmen Sie die Verteilung der durch

$$V = \begin{cases} |W| & \text{falls } Z \geq 0, \\ -|W| & \text{falls } Z < 0, \end{cases}$$

definierten Zufallsvariable. *[4]*

2. (Erwartungswerte und erzeugende Funktionen [24 Punkte])

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Wie sind die Varianz, die momentenerzeugende und die charakteristische Funktion von X definiert ? *(Die Definition des Erwartungswerts kann ohne Erläuterung vorausgesetzt werden)* [*6*]

b) Sei $X \sim N(m, v)$ mit $m \in \mathbb{R}$ und $v \in [0, \infty)$. Berechnen Sie die momentenerzeugende Funktion von X. [*5*]

c) Eine Zufallsvariable Y heisst *log-normalverteilt*, wenn $X = \log(Y)$ normalverteilt ist (log bezeichnet hier den natürlichen Logarithmus). Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer log-normalverteilten Zufallsvariable. [*4*]

d) Zeigen Sie: Für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt $X \sim -X$ genau dann, wenn der Imaginärteil der charakteristischen Funktion verschwindet. [*6*]

e) Nennen Sie ein Beispiel einer Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, deren charakteristische Funktionen punktweise gegen eine Funktion $\varphi(t)$ konvergieren, die selbst keine charakteristische Funktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$ ist. *(Hier ist kein Beweis verlangt, das Angeben eines Beispiels genügt)* [*3*]

3. (Grenzwertsätze [44 Punkte])

a) Seien X_n $(n \in \mathbb{N})$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E[X_n] = 0$. Formulieren und beweisen Sie den zentralen Grenzwertsatz für die Summen $X_1 + \ldots + X_n$. Dabei können Sie auf grundlegende Sätze aus der Vorlesung verweisen, ohne diese separat zu beweisen. Lässt sich die Aussage auf unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ erweitern ? *[16]*

b) Seien X_n und Y_n $(n \in \mathbb{N})$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Erwartungswert m und Varianz $v > 0$. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen

$$U_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{2nv}} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i \right)$$

in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z konvergieren. *[6]*

c) Sei A_n $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Ereignissen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie

$$P[A_n \text{unendlich oft}] \;\geq\; \limsup P[A_n].$$

[5]

d) Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ *unabhängige* Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $X_n \to X$ P-stochastisch $\quad\Rightarrow\quad E[X_n] \to E[X]$,

(ii) $X_n \to X$ in $L^2(P) \quad\Rightarrow\quad X_n \to X$ in $L^1(P)$.

(iii) $X_n \to X$ schnell stochastisch $\quad\Leftrightarrow\quad X_n \to X$ P-fast sicher.

Dabei können Sie wieder auf grundlegende Sätze aus der Vorlesung verweisen ohne diese separat zu beweisen. *[13]*

e) Sei S eine nichtleere endliche Menge. Wie ist die Entropie einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S definiert ? Zeigen Sie, dass die Gleichverteilung die Entropie unter allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf S maximiert. *[4]*