Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 2017/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

Klausur „Einführung in die W'theorie"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 4 Aufgaben, von denen Sie 3 bearbeiten sollten. Bitte streichen Sie die nicht bearbeitete Aufgabe, da nur 3 Aufgaben bei der Korrektur berücksichtigt werden.
- Pro Aufgabe können maximal 30 Punkte erreicht werden.
- Nehmen Sie sich am Anfang einige Minuten Zeit, um alle Aufgaben sorgfältig durchzulesen und zu entscheiden, welche Aufgaben Sie bearbeiten.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Abgabe bis spätestens 11.20 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4			**Summe**	**Note**
Punkte								

1. (Zufallsvariablen und ihre Verteilung)

In der Lösung dieser Aufgabe brauchen Sie (ausnahmsweise) *keine Begründungen und Beweise anzugeben !*

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Wie sind die Verteilung und die Verteilungsfunktion von X definiert ? Wann nennt man die Verteilung absolutstetig ? Wie hängen die Verteilungsfunktion und die Dichte in diesem Fall zusammen ? *[6 Pkt.]*

b) Sind die Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen absolutstetig ? Skizzieren Sie die Graphen der Verteilungsfunktionen, sowie, im absolutstetigen Fall, die Graphen der Dichten (mit Beschriftung der Koordinatenachsen):

(i) $U \sim \text{Unif}(-1, 3)$,

(ii) $X \sim N(1, 0.01)$,

(iii) $Y = B \cdot Z$ mit B, Z unabhängig, $Z \sim N(0, 1)$, $P[B = 0] = P[B = 1] = 1/2$,

(iv) $W = (2B - 1) \cdot Z$ mit B, Z wie in (iii). *[18]*

c) Sei A der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Radius Exp(1)-verteilt ist. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte der Verteilung von A. *[6]*

Lösung.

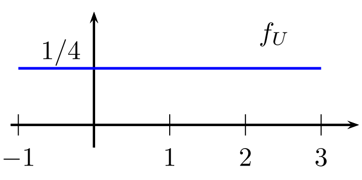
a) Verteilung: $\mu[B] = \mathbb{P}[X \in B]$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Verteilungsfunktion: $F(c) = \mathbb{P}[X \le c]$, $c \in \mathbb{R}$.

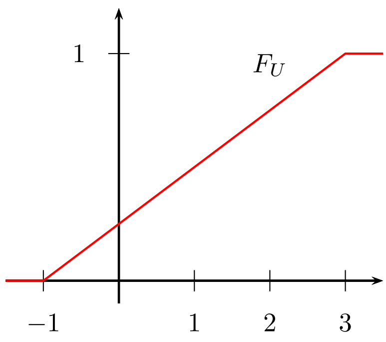
$$\begin{aligned} \mu \text{ absolutstetig } &\iff \mu[N] = 0 \text{ füer jede Lebesgue-Nullmenge} \\ &\iff \exists f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}; dx) : \mu[B] = \int_B f(x)\mathrm{d}x \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt

$$F(c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x.$$

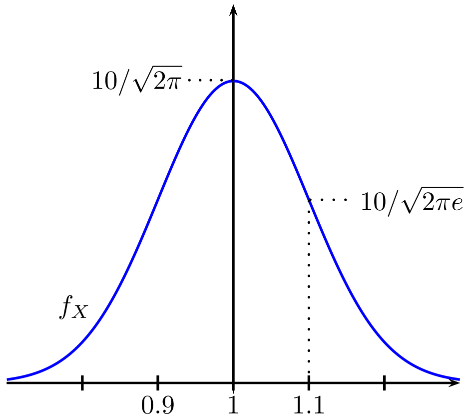
b) (i) Die Verteilung ist absolutstetig.

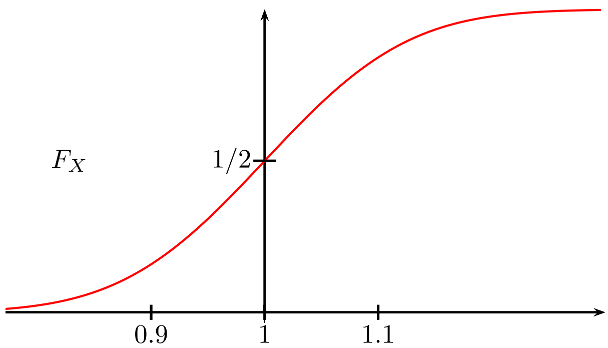




,

(ii) Die Verteilung ist absolutstetig



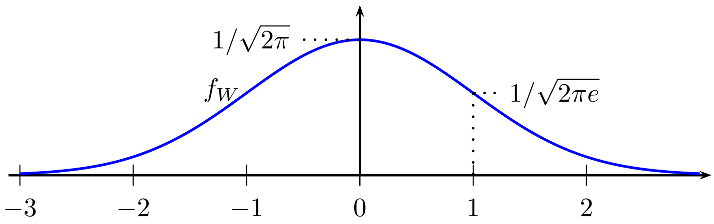


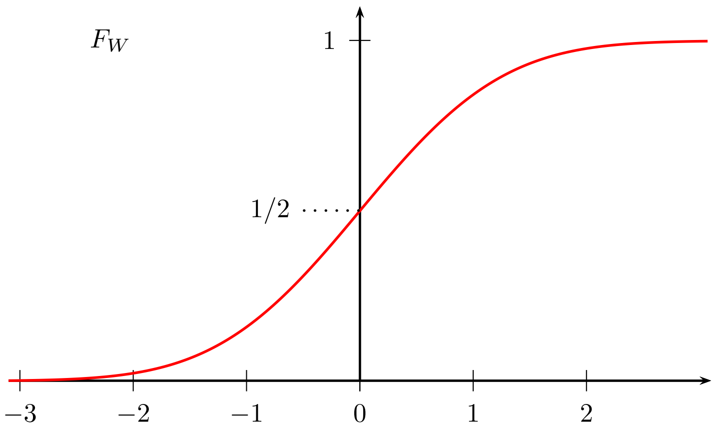
(iii) Die Verteilung μ ist gegeben durch $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}N(0,1)$ und somit nicht absolutstetig, die Verteilungsfunktion ist rechtsstetig und springt bei 0 von 1/4 auf 3/4.

(iv) Sei $\mu = N(0,1)$ die Standardnormalverteilung, dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[W \in A] &= \frac{1}{2}\mathbb{P}[W \in A | B = 1] + \frac{1}{2}\mathbb{P}[W \in A | B = 0] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}[Z \in A] + \frac{1}{2}\mathbb{P}[-Z \in A] = \mathbb{P}[Z \in A].\end{aligned}$$

Somit ist die Verteilung der Zufallsvariablen W gleich $N(0,1)$, also absolutstetig.





c) Es bezeichne $R \sim Exp(1)$ den Radius, dann ist der Flächeninhalt gegeben durch $A = \pi R^2$. Die Verteilungsfunktion ist dann für $c \geq 0$

$$F(c) = \mathbb{P}[A \leq c] = \mathbb{P}\left[R \leq \sqrt{\frac{c}{\pi}}\right] = 1 - e^{-\sqrt{c/\pi}}$$

und für $c < 0$ gilt $F(c) = 0$. Die Dichte ist gegeben durch

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} e^{-\sqrt{x/\pi}} \mathbb{1}_{x>0}.$$

2. (Erwartungswerte und charakteristische Funktionen)

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Wie sind der Erwartungswert, die Varianz und die charakteristische Funktion von X definiert ? (Die Definition des Lebesgue-Integrals kann ohne Erläuterung vorausgesetzt werden) [*5 Pkt.*]

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen:

(i) $U \sim \mathrm{Unif}(-1, 3)$,

(ii) $Y = B \cdot Z$ mit B, Z unabhängig, $Z \sim N(0, 1)$, $P[B = 0] = P[B = 1] = 1/2$.

(iii) $W = \min(S, T)$ mit $S, T \sim \mathrm{Exp}(1)$ unabhängig. [*15*]

c) Berechnen Sie die charakteristische Funktion einer $\mathrm{Bin}(n, p)$-verteilten Zufallsvariable. [*4*]

d) Sei $\lambda \in (0, \infty)$. Beweisen Sie *mithilfe von charakteristischen Funktionen*, dass die Verteilungen $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$ im Grenzwert $n \to \infty$ schwach gegen eine Poisson(λ)-Verteilung konvergieren. [*6*]

Lösung.

a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x \, \mu_X(\mathrm{d}x), \; X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}), \\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right], \; X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}), \\
\phi(t) &= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right], \; t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

b) (i) Die Dichte ist $f(x) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{(-1,3)}(x)$, also

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\frac{1}{2}(3^2 - (-1)^2) = \frac{1}{4}4 = 1, \\
\mathrm{Var}[X] &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{3}(x-1)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12}x^3\Big|_{x=-2}^{2} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[BZ] \overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}[B]\,\mathbb{E}[Z] = \left(\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1\right)\cdot 0 = 0, \\
\mathrm{Var}[Y] &= \mathbb{E}\left[Y^2\right] = \mathbb{E}\left[B^2 Z^2\right] = \mathbb{E}\left[BZ^2\right] \overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}[B]\,\mathbb{E}\left[Z^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1\right)\cdot 1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(iii) Es gilt

$$\mathbb{P}[W > t] = \mathbb{P}[S > t, T > t] \overset{\text{S,T unabh.}}{=} \mathbb{P}[S > t]\,\mathbb{P}[T > t] = (e^{-t})^2.$$

Also,

$$\mathbb{E}[W] = \int_0^\infty \mathbb{P}[W > t]\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-2t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^{-2t}|_{t=0}^\infty = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{E}\left[W^2\right] = \int_0^\infty \mathbb{P}[W > t]\,2t\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty 2te^{-2t}\mathrm{d}t \overset{\text{part.Int.}}{=} \int_0^\infty e^{-2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Folglich gilt

$$\mathrm{Var}[W] = \mathbb{E}\left[W^2 - \mathbb{E}[W]^2\right] = \frac{1}{4}.$$

c) Sei $X \sim Bin(n,p)$, die charakteristische Funktion ist dann gegeben durch

$$\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \sum_{k=0}^n e^{itk} b_{n,p}(k) = \sum_{k=0}^n e^{itk} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k}$$
$$= \sum_{k=0}^n (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k} = \left(pe^{it} + (1-p)\right)^n = \left(1 + p(e^{it}-1)\right)^n$$

d) Aus c) haben wir

$$\phi_n(t) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)\right)^n \overset{n\to\infty}{\to} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}.$$

Andererseits gilt für die charakteristische Funktionen einer Poisson(λ)$-$ Verteilung

$$\phi_{Poisson}(t) = \sum_{k=0}^\infty e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{\left(e^{it}-1\right)\lambda} = \lim_{n\to\infty}\phi_n(t).$$

Nach einem Satz aus der Vorlesung wissen wir, dass die schwache Konvergenz der Verteilungen folgt, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ die charakteristischen Funktionen konvergieren und der Grenzwert stetig bei $t = 0$ ist. In diesem Fall ist die Grenzwertverteilung die eindeutige WV, deren charakteristische Funktion der Grenzwert der charakteristischen Funktionen ist.

3. (Grenzwertsätze)

a) Seien X_n ($n \in \mathbb{N}$) unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E[X_n] = 0$. Formulieren und beweisen Sie ein starkes Gesetz der großen Zahlen für die Mittelwerte $(X_1 + \ldots + X_n)/n$. Dabei können Sie auf grundlegende Sätze aus der Vorlesung verweisen, ohne diese separat zu beweisen. *[12]*

b) Ein fairer Würfel wird 12.000 mal geworfen. Sei S die Anzahl der Sechsen, die dabei fallen. Bestimmen Sie a und b mit

$$P[1900 < S < 2200] \;\approx\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx.$$

[9]

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei U_n eine auf dem n-dimensionalen Einheitswürfel $[0,1]^n$ gleichverteilte Zufallsvariable, die auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiert ist. Zeigen Sie, dass $\|U_n\|^2/n$ stochastisch gegen $1/3$ konvergiert. *[9]*

Lösung.

a) Starkes Gesetz der großen Zahlen: Sei

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n},$$

wobei nach Voraussetzung bereits $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $X_i \in \mathcal{L}^2$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Dann folgt

$$S_n \to 0 \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis:

Schnelle stochastische Konvergenz entlang Teilfolge n^2:

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_{n^2}}{n^2} \geq \epsilon\right] \overset{\text{Chebychev}}{\leq} \frac{1}{\epsilon^2 n^4} \mathrm{Var}\left[S_{n^2}\right] \overset{\text{iid}}{=} \frac{n^2}{\epsilon^2 n^4} \mathrm{Var}\left[X_1\right] = \frac{\overbrace{\mathrm{Var}\left[X_1\right]}^{=u\in(0,\infty)}}{\epsilon^2 n^2}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[\frac{S_{n^2}}{n^2} \geq \epsilon\right] < \infty \Rightarrow \frac{S_{n^2}}{n^2} \to 0 \text{ schnell stochastisch}$$

$$\overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Rightarrow} \frac{S_{n^2}}{n^2} \to 0 \; P\text{-f.s.}$$

Fluktuationen:
Sei $D_n = \max_{n^2 \leq k < (n+1)^2} |S_k - S_{n^2}|$. Analog zu vorhin zeigen wir schnelle stochastische Konvergenz:

$$\mathbb{P}\left[\frac{D_n}{n^2} \geq \epsilon\right] \leq \sum_{k=n^2}^{n^2+2n} \mathbb{P}\left[\frac{|S_k - S_{n^2}|}{n^2} \geq \epsilon\right] \overset{\text{Chebychev}}{\leq} \frac{1}{\epsilon^2 n^4} \sum_{k=n^2}^{n^2+2n} \overbrace{\mathrm{Var}\left[S_k - S_{n^2}\right]}^{=(k-n^2)u \leq 2nu}$$
$$\leq \frac{1}{\epsilon^2 n^4} 2n \cdot 2nu \leq \frac{4u}{\epsilon^2 n^2}.$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[\frac{D_n}{n^2} \geq \epsilon\right] < \infty \overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Rightarrow} \frac{D_n}{n^2} \to 0 \, P\text{-f.s.}$$

Folgerung:
Für gegebenes $k \in \mathbb{N}$ wähle n mit $n^2 \leq k < (n+1)^2$. Dann gilt

$$\left|\frac{S_k}{k}\right| \leq \left|\frac{S_{n^2}}{k}\right| + \frac{D_n}{k} \leq \left|\frac{S_{n^2}}{n^2}\right| + \frac{D_n}{n^2} \to 0 \, P\text{-f.s.}$$

b) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{1}{6} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}[X_i = 0] = \frac{5}{6},$$

d.h. $X_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{6}\right)$. Insbesondere gilt $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{6}$ und $\mathrm{Var}[X_i] = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$. Sei nun $S = \sum_{k=1}^{12000} X_i$. Dann ist

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{k=1}^{12000} \mathbb{E}[X_i] = \frac{12000}{6} = 2000,$$

sowie

$$\mathrm{Var}[S] = 12000 \mathrm{Var}[X_1] = 12000 \cdot \frac{5}{36} = \frac{5000}{3}.$$

Somit gilt

$$\mathbb{P}[S \in (1900, 2200)] = \mathbb{P}\left[\frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} \in \left[\frac{1900 - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}, \frac{2200 - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right]\right]$$
$$= \mathbb{P}\left[\frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} \in \left[\frac{-100}{\sqrt{5000/3}}, \frac{200}{\sqrt{5000/3}}\right]\right].$$

Mit einer Normalapproximation wie im ZGS folgt

$$P[1900 < S < 2200] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} \, dx$$

mit $a = -\frac{100}{\sqrt{5000/3}} = -\sqrt{2/3}$ und $b = \frac{200}{\sqrt{5000/3}} = \sqrt{8/3}$.
(Hierbei könnte man den Approximationsfehler z.B. mithilfe des Satzes von Berry-Esseen abschätzen - aufgrund der großen Anzahl von Würfen ist er sehr klein).

c) Seien $V_1, V_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{U}(0,1)$. Dann ist $U_n \sim (V_1, \ldots, V_n)$ und somit

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{\|U_n\|^2}{n} - \frac{1}{3}\right| \geq \epsilon\right] = \mathbb{P}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i^2 - \frac{1}{3}\right| \geq \epsilon\right].$$

Nun haben wir V_i^2 iid mit

$$\mathbb{E}\left[V_i^2\right] = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} x^3|_{x=0}^1 = \frac{1}{3}.$$

Somit gilt nach dem Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i^2 \to \frac{1}{3} \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

also insbesondere $\mathbb{P}$-stochastisch.

4. (Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen)

Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ integrierbare reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Zeigen Sie, dass das Ereignis $A = \{X_n \text{ konvergiert}\}$ in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ enthalten ist, und dass eine Zufallsvariable X mit $X_n \to X$ auf A existiert. *[5]*

b) Wie ist die stochastische Konvergenz von X_n gegen X definiert ? Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $X_n \to X$ P-stochastisch $\quad\Rightarrow\quad X_n \to X$ P-fast sicher,

(ii) $X_n \to X$ in $L^2(P)$ $\quad\Rightarrow\quad E[X_n] \to E[X]$.

(iii) X_n unabhängig und identisch verteilt $\Rightarrow$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht P-f.s.

Zeigen Sie, dass die letzte falsche Aussage unter einer kleinen Zusatzvoraussetzung richtig ist. *[13]*

c) Seien $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ reelle Zufallsvariablen mit $\sum_{n=1}^{\infty} P[X_n \neq Y_n] < \infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Sie können dabei auf grundlegende Sätze aus der Vorlesung verweisen, ohne diese separat zu beweisen.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - Y_n)$ konvergiert P-fast sicher.

(ii) Konvergieren die Zufallsvariablen X_n in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X, dann konvergieren auch die Y_n in Verteilung gegen X.

(iii) Konvergieren die Mittelwerte $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ P-fast sicher gegen einen Grenzwert m, dann gilt auch

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \quad\to\quad m \qquad P\text{-fast sicher.}$$

[12]

Lösung.

a)

$$\begin{aligned}\{(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\} &\iff (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge}\\ &\iff \forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall m, n \geq n_0 : |X_n - X_m| < \epsilon.\end{aligned}$$

Also

$$A \;=\; \bigcap_{\epsilon\in\mathbb{Q}_+} \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{m,n\geq n_0} \underbrace{\{|X_n - X_m| < \epsilon\}}_{\substack{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\\ \text{da } (x,y)\mapsto|x-y| \text{ stetig}}} \;\in\; \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Eine Zufallsvariable mit $X_n \to X$ auf A ist zum Beispiel durch $X = \limsup_{n\to\infty} X_n$ gegeben, denn für $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$X \leq c \iff \forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq n_0 : X_n \leq c + \epsilon$$

und folglich

$$\{X \leq c\} = \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+} \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} \{X_n < c + \epsilon\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

b) (i) falsch: Zum Beispiel sei $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P}) = ((0,1], \mathcal{B}(0,1), \mathcal{U}(0,1))$ und man betrachte die Folge von Zufallsvariablen $X_1 = 1_{(0,1]}, X_2 = 1_{(0,1/2]}, X_3 = 1_{(1/2,1]}, X_4 = 1_{(0,1/4]}$ usw. Es gilt

$$\mathbb{P}\left[|X_n| > \epsilon\right] = \mathbb{P}\left[X_n = 1\right] \to 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Also, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, obwohl $\limsup\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = 1$ für alle $\omega \in \Omega$.

(ii) richtig:

$$|\mathbb{E}\left[X_n\right] - \mathbb{E}\left[X\right]| \overset{\text{linear}}{=} |\mathbb{E}\left[X_n - X\right]| \overset{\text{monoton}}{\leq} \mathbb{E}\left[|X_n - X|\right] \overset{\text{CS}}{\leq} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^2\right]^{1/2} \to 0$$

Folglich,

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] \to \mathbb{E}\left[X\right].$$

(iii) falsch: Es seien $X_n(\omega) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$. Dann sind die Zufallsvariablen X_n unabhängig, da

$$\mathbb{P}\left[X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n\right] = \prod_{i=1}^{n} 1_{A_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left[X_i \in A_i\right].$$

Gleichzeitig gilt offensichtlich $X_n \to 1$ P-f.s.
Falls wir zusätzlich annehmen, dass die X_n nicht fast sicher deterministisch sind (also die Verteilung μ der X_n kein Dirac-Maß ist), dann ist die Aussage wahr. In diesem Fall existieren reelle Zahlen a, b mit $a < b$, sodass

$$P[X_n \leq a] = \mu[(-\infty, a]] > 0 \qquad \text{und} \qquad P[X_n \geq b] = \mu[[b, \infty)] > 0.$$

Nach Borel-Cantelli treten dann mit Wahrscheinlichkeit 1 jeweils unendlich viele der Ereignisse $\{X_n \leq a\}$ bzw. $\{X_n \geq b\}$ ein. Also gilt

$$P[\liminf X_n \leq a < b \leq \limsup X_n] \; = \; 1,$$

d.h. die Folge (X_n) konvergiert P-fast sicher nicht.

c) (i) Aus der Voraussetzung $\sum \mathbb{P}[X_n \neq Y_n] < \infty$ folgt nach Borel-Cantelli:

$$\mathbb{P}[X_n \neq Y_n \text{ unendlich oft}] = 0.$$

Also existiert für P-fast alle ω eine natürliche Zahl $n_0(\omega)$ mit

$$X_n(\omega) = Y_n(\omega) \qquad \text{für alle } n \geq n_0(\omega).$$

Hieraus folgt, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich viele Summanden in $\sum(X_n - Y_n)$ ungleich 0 sind. Also konvergiert die Reihe P-fast sicher.

(ii) Aus der Voraussetzung folgt $P[X_n \neq Y_n] \to 0$. Sei nun $f \in C_b(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[f(Y_n)] \;=\; \mathbb{E}[f(X_n)] + \mathbb{E}[f(Y_n) - f(X_n)]\,.$$

Wegen

$$|\mathbb{E}[f(Y_n) - f(X_n)]| \;=\; |\mathbb{E}[f(Y_n) - f(X_n); Y_n \neq X_n]| \;\leq\; 2\sup|f|\,\mathbb{P}[Y_n \neq X_n] \;\to\; 0$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(Y_n)] \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] \;=\; \mathbb{E}[f(X)] \qquad \forall\, f \in C_b(\mathbb{R}),$$

also $Y_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$.

(iii)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\overset{n\to\infty}{\to} m} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - X_i).$$

Nun ist für fast alle ω und $i \geq n_0(\omega)$ $Y_i - X_i = 0$, also gilt für $n \geq n_0(\omega)$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_0(\omega)}(Y_i - X_i) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Insgesamt folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(\omega) \overset{n\to\infty}{\to} m \quad \text{für } P\text{-fast alle } \omega.$$