Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 2017/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

Klausur „Einführung in die W'theorie"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 4 Aufgaben, von denen Sie 3 bearbeiten sollten. Bitte streichen Sie die nicht bearbeitete Aufgabe, da nur 3 Aufgaben bei der Korrektur berücksichtigt werden.
- Pro Aufgabe können maximal 30 Punkte erreicht werden.
- Nehmen Sie sich am Anfang einige Minuten Zeit, um alle Aufgaben sorgfältig durchzulesen und zu entscheiden, welche Aufgaben Sie bearbeiten.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Abgabe bis spätestens 11.20 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4			**Summe**	**Note**
Punkte								

1. (Zufallsvariablen und ihre Verteilung)

In der Lösung dieser Aufgabe brauchen Sie (ausnahmsweise) *keine Begründungen und Beweise anzugeben !*

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Wie sind die Verteilung und die Verteilungsfunktion von X definiert ? Wann nennt man die Verteilung absolutstetig ? Wie hängen die Verteilungsfunktion und die Dichte in diesem Fall zusammen ? [*6 Pkt.*]

b) Sind die Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen absolutstetig ? Skizzieren Sie die Graphen der Verteilungsfunktionen, sowie, im absolutstetigen Fall, die Graphen der Dichten (mit Beschriftung der Koordinatenachsen):

(i) $U \sim \text{Unif}(-1, 3)$,

(ii) $X \sim N(1, 0.01)$,

(iii) $Y = B \cdot Z$ mit B, Z unabhängig, $Z \sim N(0, 1)$, $P[B = 0] = P[B = 1] = 1/2$,

(iv) $W = (2B - 1) \cdot Z$ mit B, Z wie in (iii). [*18*]

c) Sei A der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Radius Exp(1)-verteilt ist. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte der Verteilung von A. [*6*]

2. (Erwartungswerte und charakteristische Funktionen)

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Wie sind der Erwartungswert, die Varianz und die charakteristische Funktion von X definiert ? (Die Definition des Lebesgue-Integrals kann ohne Erläuterung vorausgesetzt werden) [*5 Pkt.*]

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen:

   (i) $U \sim \mathrm{Unif}(-1, 3)$,

   (ii) $Y = B \cdot Z$ mit B, Z unabhängig, $Z \sim N(0, 1)$, $P[B = 0] = P[B = 1] = 1/2$.

   (iii) $W = \min(S, T)$ mit $S, T \sim \mathrm{Exp}(1)$ unabhängig.

[*15*]

c) Berechnen Sie die charakteristische Funktion einer $\mathrm{Bin}(n, p)$-verteilten Zufallsvariable. [*4*]

d) Sei $\lambda \in (0, \infty)$. Beweisen Sie *mithilfe von charakteristischen Funktionen*, dass die Verteilungen $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$ im Grenzwert $n \to \infty$ schwach gegen eine $\mathrm{Poisson}(\lambda)$-Verteilung konvergieren. [*6*]

3. (Grenzwertsätze)

a) Seien X_n ($n \in \mathbb{N}$) unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E[X_n] = 0$. Formulieren und beweisen Sie ein starkes Gesetz der großen Zahlen für die Mittelwerte $(X_1 + \ldots + X_n)/n$. Dabei können Sie auf grundlegende Sätze aus der Vorlesung verweisen, ohne diese separat zu beweisen. *[12]*

b) Ein fairer Würfel wird 12.000 mal geworfen. Sei S die Anzahl der Sechsen, die dabei fallen. Bestimmen Sie a und b mit

$$P[1900 < S < 2200] \;\approx\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx.$$

[9]

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei U_n eine auf dem n-dimensionalen Einheitswürfel $[0,1]^n$ gleichverteilte Zufallsvariable, die auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiert ist. Zeigen Sie, dass $\|U_n\|^2/n$ stochastisch gegen $1/3$ konvergiert. *[9]*

4. (Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen)

Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) integrierbare reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Zeigen Sie, dass das Ereignis $A = \{X_n \text{ konvergiert}\}$ in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ enthalten ist, und dass eine Zufallsvariable X mit $X_n \to X$ auf A existiert. *[5]*

b) Wie ist die stochastische Konvergenz von X_n gegen X definiert ? Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $X_n \to X$ P-stochastisch $\quad \Rightarrow \quad X_n \to X$ P-fast sicher,

(ii) $X_n \to X$ in $L^2(P) \quad \Rightarrow \quad E[X_n] \to E[X]$.

(iii) X_n unabhängig und identisch verteilt $\Rightarrow$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht P-f.s.

Zeigen Sie, dass die letzte falsche Aussage unter einer kleinen Zusatzvoraussetzung richtig ist. *[13]*

c) Seien $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) reelle Zufallsvariablen mit $\sum_{n=1}^{\infty} P[X_n \neq Y_n] < \infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Sie können dabei auf grundlegende Sätze aus der Vorlesung verweisen, ohne diese separat zu beweisen.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - Y_n)$ konvergiert P-fast sicher.

(ii) Konvergieren die Zufallsvariablen X_n in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X, dann konvergieren auch die Y_n in Verteilung gegen X.

(iii) Konvergieren die Mittelwerte $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ P-fast sicher gegen einen Grenzwert m, dann gilt auch

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \to \quad m \qquad P\text{-fast sicher.}$$

[12]