Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie - Hinweise zur Klausur

a) Zentrale Sätze

1. Formulieren und beweisen Sie den **zentralen Grenzwertsatz**. Welche der Voraussetzungen sind wesentlich ? Welche können abgeschwächt werden ? Folgern Sie den Satz von de Moivre/Laplace aus dem ZGS.

2. Formulieren und beweisen Sie das **starke Gesetz der großen Zahlen** (L2 Version). Welche weiteren Aussagen gelten, wenn zusätzlich Unabhängigkeit vorausgesetzt wird ? Wie geht die Unabhängigkeit im Beweis dieser Aussagen ein ?

3. Beweisen Sie eine obere und eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeiten **großer Abweichungen** vom Gesetz der großen Zahlen. Stellen Sie einen Zusammenhang zur relativen Entropie her.

4. Was ist ein **asymptotisches Ereignis** ? Beispiele und Gegenbeispiele ? Formulieren und beweisen Sie das **0-1 Gesetz von Kolmogorov.**

5. Erläutern Sie die **Poisson-Approximation** und die **Normalapproximation** von Binomialverteilungen. In welchem Bereich sind diese Approximationen anwendbar ? Wie erhält man approximative Konfidenzintervalle mithilfe der Normalapproximation ?

6. Formulieren und beweisen Sie das erste und zweite **Borel-Cantelli-Lemma**, und folgern Sie das starke Gesetz der großen Zahlen für unabhängige 0-1-Experimente.

7. Formulieren Sie den **Eindeutigkeitssatz** für W'maße (ohne Beweis). Erläutern Sie Anwendungen, z.B. auf W'maße auf R, endliche und unendliche Produktmodelle,....

b) Erwartungswert und Konvergenzbegriffe

8. Welche **Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen** kennen Sie (Definitionen), und in welchem Zusammenhang stehen diese ? Welche **Ungleichungen**/Argumente werden zum Beweis jeweils verwendet ?

9. Was versteht man unter **Konvergenz in Verteilung**, was unter **schwacher Konvergenz** von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ? Beispiele ? Unter welcher Voraussetzung existiert eine schwach konvergente Teilfolge ?

10. Wie ist der **Erwartungswert** einer reellwertigen Zufallsvariable definiert? Formulieren und beweisen Sie den **Transformationssatz**. Wie berechnet man Erwartungswerte für Verteilungen mit Dichten ? Beispiele ?

11. Wie sind **Varianz**, **Kovarianz** und **Korrelation** definiert ? Was besagt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung** für die Kovarianz bzw. Korrelation ?

12. Definieren Sie, was eine **charakteristische Funktion** ist. Welche Eigenschaften bzw. Rechenregeln gelten ? Definieren Sie, was eine **momentenerzeugende Funktion** ist. Wie und unter welchen Voraussetzungen können aus der momentenerzeugenden bzw. charakteristischen Funktion die Momente einer Zufallsvariable berechnet werden ?

13. Nennen Sie (ohne Beweis) den **Satz von der monotonen Konvergenz**, und leiten Sie daraus das **Lemma von Fatou** und den **Satz von Lebesgue** her. Geben Sie ein Beispiel, wo das Vertauschen von Grenzwert und Erwartungswert nicht zulässig ist.

c) Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

14. Wie ist die **Unabhängigkeit** für allgemeine Zufallsvariablen definiert ? Zeigen Sie, dass Funktionen von unabhängigen Zufallsvariablen wieder unabhängig sind. Wie berechnet man die Verteilung von Summen unabhängiger reeller Zufallsvariablen ?

15. Was versteht man unter der **gemeinsamen Verteilung** von mehreren Zufallsvariablen ? Wie erkennt man Unabhängigkeit an der gemeinsamen Verteilung bzw. an deren Dichte ?

16. Was versteht man unter einer **Zufallsvariable** und unter ihrer **Verteilung** ? Nennen Sie **spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen**. Erläutern Sie, wie diese auftreten, und welche Eigenschaften Zufallsvariablen mit diesen Verteilungen haben.

17. Wie sind ein- und mehrdimensionale **Normalverteilungen** definiert ? Warum sind diese Verteilungen für die Wahrscheinlichkeitstheorie fundamental ?

18. Was versteht man unter der **Verteilungsfunktion** einer reellen Zufallsvariable ? Beispiele ? Wie berechnet man den Erwartungswert aus der Verteilungsfunktion ?

19. Was sind **Quantile** ? Wie kann man eine reelle ZV mit vorgegebener Verteilung simulieren ?

20. Was ist eine **(absolut)stetige Zufallsvariable** ? Beispiele ? Wie berechnet man die **Dichte** aus der Verteilungsfunktion und umgekehrt ? Was ist eine **relative Dichte** zweier W'maße ?

21. Was ist eine **empirische Verteilung** ? Welche asymptotischen Aussagen gelten für die empirischen Verteilungen von i.i.d. Zufallsvariablen ?

22. Wie ist eine **exponentielle Familie** definiert (Beispiele) ? Definieren Sie die absolute und relative Entropie. Wie hängen beide zusammen ? Warum sind diese Größen nicht-negativ ? Welche Extremaleigenschaft gilt für Verteilungen aus exponentiellen Familien ?

Allgemeine Hinweise

- Die Klausur findet statt am Donnerstag, 22.2.2018, von 9.00-11.00 Uhr im
  GHS (Anfangsbuchstabe A-K), ZS (L-Q) und KHS (R-Z).
- Hilfsmittel, Unterlagen und Handys sind nicht zugelassen.
- Die Aufgaben enthalten typischerweise:
  - Fragen zu Definitionen, Sätzen und Beweisen aus der Vorlesung. Zur Orientierung finden Sie auf diesem Blatt eine Liste von typischen Fragen (ohne Anspruch auf Vollständigkeit).
  - Aufgabenteile zum Verständnis und der Anwendung des Vorlesungsinhalts. Hier bieten die Übungsaufgaben und Beispiele der Vorlesung eine gute Orientierung.
  - Aufgabenteile mit konkreten Berechnungen. Zum Üben erhalten Sie auf Blatt 15 nochmal eine Reihe von typischen Rechenaufgaben aus der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Die Klausureinsicht findet am 23.2. von 13 bis 15 Uhr statt, die Wiederholungsprüfung ist am 16.3.