Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 17/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

9. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Dienstag 12.12., 15 Uhr

Aufgabe 1 (Autoregressiver Prozess). Seien $\varepsilon, \alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten den durch

$$X_n \; := \; \alpha X_{n-1} + \varepsilon Z_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

definierten AR(1)-Prozess, wobei X_0 und Z_n $(n \in \mathbb{N})$ unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit $Z_n \sim N(0,1)$ sind. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Falls $X_{n-1} \sim N(m, \sigma^2)$, so gilt $X_n \sim N(\alpha m, \alpha^2\sigma^2 + \varepsilon^2)$.

b) *Stationäre Verteilung:* Für $|\alpha| < 1$ ist $\mu := N(0, \frac{\varepsilon^2}{1-\alpha^2})$ ein *Gleichgewicht*, d.h.

$$X_0 \sim \mu \quad \Longrightarrow \quad X_n \sim \mu \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

c) *Abfall der Korrelationen:* Falls $X_0 \sim \mu$, so gilt

$$\mathrm{Cov}[X_n, X_{n-k}] \;=\; \alpha^k \frac{\varepsilon^2}{1-\alpha^2} \qquad \text{für alle } 0 \le k \le n.$$

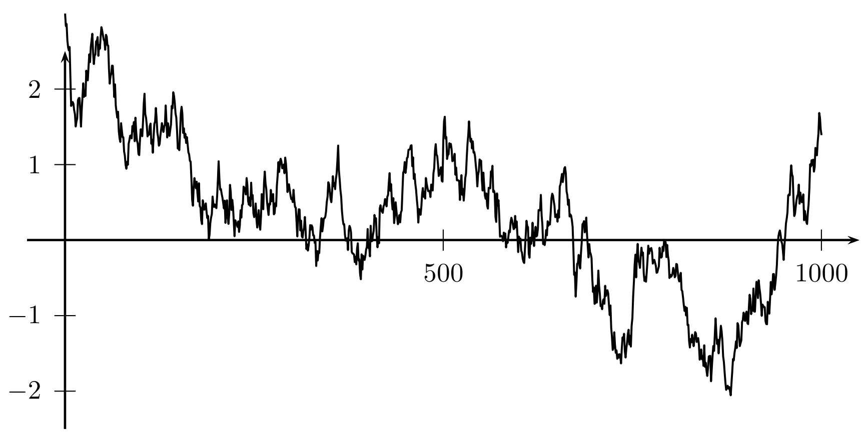

Abbildung 1: Trajektorie eines AR(1)-Prozesses mit Parametern $\alpha = 0.8$ und $\epsilon^2 = 1.5$.

Aufgabe 2 (Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen - WICHTIG).
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $p \in [1, \infty)$.

a) Zeigen Sie: Konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen 0, dann existiert eine Teilfolge $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die $\mathbb{P}$-fast sicher gegen 0 konvergiert.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass aus L^p-Konvergenz von X_n gegen 0 stochastische Konvergenz folgt. Zeigen Sie, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

c) Wir setzen nun zusätzlich voraus, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|^p$ integrierbar ist. Zeigen Sie, dass dann aus $\mathbb{P}$-fast sicherer bzw. $\mathbb{P}$-stochastischer Konvergenz von X_n gegen 0 auch L^p-Konvergenz folgt.

Aufgabe 3 (Unabhängigkeit und Unkorreliertheit). Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie:

a) Sind X und Y unabhängig, dann ist $X \cdot Y$ in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, und

$$\mathbb{E}[XY] \;=\; \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

b) Ist die gemeinsame Verteilung von X und Y eine zweidimensionale Normalverteilung, dann ist Unabhängigkeit von X und Y äquivalent zur Unkorreliertheit von X und Y.

c) Konstruieren Sie normalverteilte Zufallsvariablen X und Y, die unkorrelliert, aber nicht unabhängig sind.

Aufgabe 4 (Summen und Quotienten unabhängiger Zufallsvariablen). Seien X und Y unter P unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit absolutstetigen Verteilungen.

a) Berechnen Sie die Verteilung von $X+Y$, wenn X und Y auf $(0, 1)$ gleichverteilt sind.

b) Zeigen Sie: Gilt $X > 0$ P-fast sicher, dann ist die Verteilung von $Z = Y/X$ absolutstetig mit Dichte

$$f_{Y/X}(z) \;=\; \int_0^\infty f_X(x)\, f_Y(zx)\, x\, dx.$$

Berechnen Sie die Verteilung von Z, wenn X und Y auf $(0, 1)$ gleichverteilt sind.