Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 17/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

8. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Dienstag 5.12., 15 Uhr

Aufgabe 1 (Bedingte Dichten).

a) Patrick und Lisa treffen sich freitags nach der Wahrscheinlichkeitstheorievorlesung in der Cafeteria. Sie kommen dort unabhängig und gleichverteilt zwischen 12 und 13 Uhr an. Jeder ist bereit s Minuten zu warten, bevor er wieder geht. Finden Sie ein minimales s, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich die beiden treffen, mindestens 50 % beträgt.

b) Ein Stock wird an einer zufällig gewählten Stelle in zwei Teile zerbrochen. Der längere Teil wird wieder zufällig in zwei Teile geteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich aus den drei Teilen ein Dreieck bilden lässt?

Aufgabe 2 (Dichtetransformation). Seien X_1 und X_2 unabhängige, zum Parameter λ exponentialverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $Y_1 = X_1 + X_2$ und $Y_2 = X_1/(X_1+X_2)$ ebenfalls unabhängig sind, und bestimmen Sie die Verteilungen von Y_1 und Y_2.

Aufgabe 3 (Zufällige Bewegungen).

a) Ein Frosch bewegt sich wie folgt zufällig in einer Ebene: Er springt eine Streckeneinheit weit in eine zufällige Richtung Ψ_1, sucht sich dann eine neue zufällige Richtung Ψ_2 aus und springt wieder eine Streckeneinheit weit, usw. Hierbei seien die Winkel Ψ_i unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 2\pi)$. Es sei D_n der Abstand vom Startpunkt zur Position nach dem n-ten Schritt. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[D_n^2]$.

b) Beim Ursprung der Ebene befinden sich zu Beginn 30 Frösche, die sich unabhängig voneinander wie in a) bewegen. Die Frösche benötigen für jeden Sprung eine Zeiteinheit. Bestimmen Sie zu jedem $n \geq 1$ ein möglichst kleines $r_n > 0$ mit der Eigenschaft: Mit Wahrscheinlichkeit $\geq 0,9$ befinden sich zur Zeit n mehr als 15 Frösche in einem Kreis mit Radius r_n um den Ursprung. Wie hängt r_n von n ab?

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft: Sind $Z_1, \ldots, Z_{30}$ unabhängig und Bernoulli-verteilt zum Parameter $p \geq 0,5 + \delta$, so ist

$$\mathbb{P}\Big[\sum_{i=1}^{30} Z_i > 15\Big] \;\geq\; 0,9 \quad .$$

Aufgabe 4 (Acceptance-Rejection Verfahren). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien μ und ν Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einem messbaren Raum $(S, \mathcal{B})$. Das Maß μ sei absolutstetig bzgl. ν mit beschränkter relativer Dichte

$$\rho(x) \;=\; d\mu/d\nu\,(x) \;\leq\; C, \qquad C \in [1, \infty).$$

a) Sei $X : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable mit Verteilung ν und $U : \Omega \to (0,1)$ eine hiervon unabhängige, auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\mu[B] \;=\; \mathbb{P}\left[X \in B \,\middle|\, U \leq \frac{\rho(X)}{C}\right] \qquad \forall\, B \in \mathcal{B},$$

d.h. μ ist die bedingte Verteilung von X gegeben $U \leq \rho(X)/C$.

b) Seien nun $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to S$ und $U_1, U_2, \ldots : \Omega \to (0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung ν bzw. $\mathcal{U}_{(0,1)}$. Zeigen Sie: Dann ist

$$T \;:=\; \min\left\{n \in \mathbb{N} \,:\, U_n \leq \frac{\rho(X_n)}{C}\right\}$$

$\mathbb{P}$-f.s. endlich, und die (für $\mathbb{P}$-f.a. ω eindeutig definierte) Zufallsvariable

$$Y(\omega) \;:=\; X_{T(\omega)}(\omega)$$

hat Verteilung μ.

c) Sei $g : [0,1]^d \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion. Geben Sie einen Algorithmus an, der, ausgehend von unabhängigen Zufallszahlen aus $(0,1)$, eine Stichprobe von der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(0,1)^d$ mit Dichte $f(x) \propto g(x)$ erzeugt. Wovon hängt die Effizienz dieses Simulationsverfahrens ab?