Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 17/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

7. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Dienstag 28.11., 15 Uhr

Aufgabe 1 (Berechnung von Erwartungswerten).

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ in den folgenden Fällen:

a.1) X ist gleichverteilt auf $[0,1]$.

a.2) Die Verteilung von X ist absolutstetig mit Dichte $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

a.3) $X = e^Y$ für eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable Y.

b) Die *momentenerzeugende Funktion* einer reellen Zufallsvariable X ist definiert durch

$$M(t) \quad = \quad \mathbb{E}[\exp(tX)] \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die momentenerzeugende Funktion in den folgenden Fällen:

b.1) X ist binomialverteilt zu den Parametern (n,p),

b.2) X ist exponentialverteilt zum Parameter λ,

b.3) X ist $N(m,\sigma^2)$ verteilt.

Wie kann man die Momente $\mathbb{E}[X^n]$ berechnen, wenn man die Funktion $M(t)$ kennt?

Aufgabe 2 (Bivariate Normalverteilung). Sei $\rho \in (-1,1)$.

a) Zeigen Sie, dass

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ im $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte, die Varianzen, und die Kovarianz $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$ von Zufallsvariablen X, Y mit gemeinsamer Verteilung μ.

Abbildung 1: Perkolation in Dimension $d = 2$ mit $p = 0.7$ und $p = 0.5$

Aufgabe 3 (Perkolation). Sei $p \in [0, 1]$. Wir betrachten unabhängige Zufallsvariablen X_i, $i \in \mathbb{Z}^d$, mit $\mathbb{P}[X_i = 1] = p$ und $\mathbb{P}[X_i = 0] = 1 - p$. Der Gitterpunkt $i \in \mathbb{Z}^d$ heißt *durchlässig*, falls $X_i = 1$ gilt. Sei A das Ereignis, daß eine unendliche Zusammenhangskomponente aus durchlässigen Gitterpunkten existiert. A_0 sei das Ereignis, daß der Nullpunkt in einer unendlichen Zusammenhangskomponente von durchlässigen Punkten enthalten ist. Zeigen Sie:

a) Im Fall $d = 1$, $p < 1$, gilt $\mathbb{P}[A] = 0$.

b) Für alle $d \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ gilt: $\quad \mathbb{P}[A] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}[A_0] > 0.$

Aufgabe 4 (Gaußsche partielle Integrationsformel). Sei X eine zentrierte normalverteilte Zufallsvariable mit Varianz $\sigma^2 > 0$.

a) Sei $g \in C^1(\mathbb{R})$. Beweisen Sie unter geeigneten Wachstumsbedingungen an $g(x)$ für $|x| \to \infty$ die partielle Integrationsformel

$$\mathbb{E}[Xg(X)] \;=\; \mathrm{Var}[X]\,\mathbb{E}[g'(X)]$$

b) Berechnen Sie mithilfe von a) die Momente $\mathbb{E}[X^n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.