Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 17/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

6. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Dienstag 21.11., 15 Uhr

Aufgabe 1 (Asymptotische Ereignisse). Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, nicht-negativen rellwertigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Welche der folgenden Ereignisse sind asymptotische Ereignisse ?

$$\{X_n > 2n \text{ unendlich oft}\},\ \{\liminf X_n < 17\},\ \{\inf X_n > 5\},$$
$$\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < 1\},\ \{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\},\ \{\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\}.$$

b) Geben Sie Beispiele von Zufallsvariablen an, die bzgl. der asymptotischen σ-Algebra messbar sind (mit Beweis).

Aufgabe 2 (Dichten). Das n-dimensionale Lebesgue-Integral einer beliebigen Borel-messbaren nicht-negativen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann als Hintereinanderausführung von eindimensionalen Integralen nach den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ berechnet werden:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \quad = \quad \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \cdots dx_1.$$

Hierbei können die eindimensionalen Integrationen in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden. Zeigen Sie:

a) Ist $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ messbar mit $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1$, dann wird durch

$$\mu[B] \;=\; \int 1_B(x) f(x)\, dx$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ definiert. Die Funktion f heißt *Dichte von* μ.

b) Sind $X_1, \ldots, X_n$ unter P unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit absolutstetigen Verteilungen, dann hat die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$ die Dichte

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)\,.$$

c) Umgekehrt gilt: Hat die gemeinsame Verteilung von $X_1, \dots, X_n$ eine Dichte der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\,, \qquad g_i : \mathbb{R} \to [0, \infty) \text{ messbar},$$

dann sind die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ unabhängig, und die Verteilungen sind absolutstetig mit Dichten $f_{X_i} = g_i \Big/ \int_{\mathbb{R}} g_i \, dx$, $1 \leq i \leq n$.

Aufgabe 3 (Rekorde). Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit *stetiger* Verteilungsfunktion. Wir betrachten die Ereignisse

$$E_n \;:=\; \{X_n > X_m \;\forall\, m < n\} \;=\; \{\text{„ein Rekord wird zur Zeit } n \text{ erreicht"}\}\ .$$

a) Zeigen Sie $P\,[X_n = X_m] = 0$ für alle $n \neq m$.

b) Folgern Sie, dass $P\,[E_n] = 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass die Ereignisse $E_1, E_2, \dots$ unabhängig sind.

Hinweis: Sollten Sie Schwierigkeiten haben, die erste Aussage zu beweisen, dann können Sie zusätzliche Annahmen an die Verteilungsfunktion machen, z.B. gleichmäßige Stetigkeit oder Absolutstetigkeit.

Aufgabe 4 (Von der geometrischen Verteilung zur Exponentialverteilung). Sei X_p eine Zufallsvariable mit $P[X_p = k] = (1-p)p^k$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zeigen Sie, dass im Grenzwert $p \to 1$ die Verteilungsfunktion der reskalierten Zufallsvariablen

$$Y_p \;:=\; (1-p)X_p$$

punktweise gegen die Verteilungsfunktion der Exp(1)-Verteilung konvergiert.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 23.11. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 20.11., Di. 21.11. und Mi 22.11. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de