Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 17/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

5. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Dienstag 14.11., 15 Uhr

Aufgabe 1 (Unabhängigkeit und Verteilungsfunktionen). Seien X und Y unabhängige reellwertige Zufallsvariablen, und sei $U = \min(X, Y)$ und $V = \max(X, Y)$. Zeigen Sie:

a) Die Verteilungsfunktionen von U und V sind gegeben durch:

$$F_U(u) \;=\; 1 - \big(1 - F_X(u)\big)\big(1 - F_Y(u)\big), \quad F_V(v) \;=\; F_X(v)F_Y(v)\ .$$

b) Sind X und Y beide exponentialverteilt zum Parameter 1, so ist U exponentialverteilt zum Parameter 2. Welche Dichte hat die Verteilung von V in diesem Fall? Skizzieren Sie die Dichten und interpretieren Sie die Ergebnisse anschaulich.

Aufgabe 2 (Deterministische Zufallsvariablen).

a) Zeigen Sie : Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann unabhängig von sich selbst, wenn eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$P\,[X = c] \;=\; 1\ .$$

b) Sei X ein fast sicherer Grenzwert einer beliebigen Folge unabhängiger Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass X unabhängig von sich selbst, also fast sicher konstant ist.

Aufgabe 3 (Asymptotische Unabhängigkeit). Jeder von n Punkten werde mit Wahrscheinlichkeit λ/n grün, und mit Wahrscheinlichkeit μ/n rot gefärbt, unabhängig von den anderen Punkten. Sei G die Anzahl der grün gefärbten, und R die Anzahl der rot gefärbten Punkte. Zeigen Sie:

a) Die Zufallsvariable (G, R) hat eine Trinomial-Verteilung mit Parametern n, λ/n, μ/n und $1 - (\lambda + \mu)/n$, d.h. es gilt

$$P[G = g, R = r] \;=\; \frac{n!}{g!\,r!\,(n - g - r)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^g \left(\frac{\mu}{n}\right)^r \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{n}\right)^{n-g-r}.$$

Insbesondere sind G und R nicht unabhängig.

b) Im Grenzwert $n \to \infty$ sind G und R asymptotisch unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λ und μ, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} P[G = g, R = r] \;=\; \dots \;(?)\; \dots$$

Aufgabe 4 (Extrema von exponentialverteilten Zufallsvariablen). Seien $T_1, T_2, \dots$ unabhängige, Exp(1)-verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Zeigen Sie

$$\mathbb{P}[T_n \geq \log n + c \log\log n \text{ unendlich oft}] \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } c > 1, \\ 1 & \text{falls } c \leq 1. \end{cases}$$

b) Folgern Sie, dass $\mathbb{P}$- fast sicher gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{T_n - \log n}{\log\log n} \;=\; 1.$$