Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 17/18
Andreas Eberle, Maximilian Fels

4. Übungsblatt „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe bis Dienstag 7.11., 15 Uhr

Aufgabe 1 (Konfidenzintervalle). Ein Fußballfan hat folgenden Verdacht: Diejenige Mannschaft, die per Losentscheid das Elfmeterschießen beginnt, hat bessere Chancen zu gewinnen. Um seine Vermutung zu belegen, betrachtet er die Ergebnisse von 100 Spielen, die durch Elfmeterschießen entschieden wurden. Davon hat die jeweils beginnende Mannschaft 60 Spiele gewonnen. Leiten Sie exakte und approximative Konfidenzintervalle zu den Konfidenzniveaus 80% und 90% für die Wahrscheinlichkeit p her, dass die beginnende Mannschaft gewinnt. Würden Sie der Vermutung auf der Basis dieser Daten zustimmen?

Aufgabe 2 (Normalapproximation der Poissonverteilung). Sei N eine zum Parameter $\lambda > 0$ Poissonverteilte Zufallsvariable. Beweisen Sie mithilfe der Stirlingschen Formel:

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left[a_\lambda \leq N \leq b_\lambda\right] \;=\; \Phi(b) - \Phi(a) \qquad \forall\ a < b$$

mit $a_\lambda := \lambda + a\sqrt{\lambda}$ und $b_\lambda := \lambda + b\sqrt{\lambda}$. Hierbei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Aufgabe 3 (Überbuchungen). Häufig ist die Zahl der zu einem Flug erscheinenden Passagiere geringer als die Zahl der Buchungen für diesen Flug. Die Fluggesellschaft praktiziert daher das sogenannte Überbuchen (d.h. sie verkauft mehr Tickets als Sitze vorhanden sind) mit dem Risiko, eventuell überzählige Passagiere mit Geld entschädigen zu müssen. Angenommen, die Fluggesellschaft hat bei jedem mitfliegenden Fluggast Einnahmen von $a = 300$ Euro, für jede überzählige Person jedoch einen Verlust von $b = 500$ Euro. Wir nehmen ferner an, dass jede Person, die einen Platz gebucht hat, unabhängig von den anderen Passagieren mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,95$ zum Flug erscheint. Wie viele Plätze würden Sie bei einem

(a) Airbus $A319$ mit $s = 124$ Sitzplätzen,

(b) Airbus $A380$ mit $s = 549$ Sitzplätzen

verkaufen, um den zu erwartenden Gewinn zu maximieren?
Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Bernoulli-Folge zu p, $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, sowie G_n der Gewinn bei n verkauften Plätzen, so gilt

$$G_{n+1} - G_n = a \cdot I_{\{S_n < s\}}\, X_{n+1} - b \cdot I_{\{S_n \geq s\}}\, X_{n+1}$$

Folgern Sie, dass $E[G_{n+1}] \geq E[G_n]$ genau dann gilt, wenn $P[S_n < s] \geq \frac{b}{a+b}$, und verwenden Sie die Normalapproximation der Binomialverteilung.

Aufgabe 4 (Ausfallraten). Sei T eine positive absolutstetige Zufallsvariable mit stetiger Dichtefunktion f. Wir definieren die *Ausfallrate* r durch

$$r(t) \ := \ \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P[T \leq t + h | T > t], \quad t \geq 0.$$

(a) Zeige: $r(t) = H'(t) = f(t)/(1 - F(t))$, wobei F die Verteilungsfunktion von T und $H(t) := -\log(1 - F(t))$ ist.

(c) Berechne die Ausfallrate in dem Fall, dass T eine Weibull-Verteilung besitzt, d.h.

$$P[T > t] = \exp(-\alpha t^{\beta - 1}).$$

Was ergibt sich, falls T exponentialverteilt ist ?